MODEL DINAMIK PENYAKIT TUBERCULOSIS DI KABUPATEN TUBAN MENGGUNAKAN SIR (*Susceptible, Infectious, Reccovered*)

Khoirul Amin[1], Kresna Oktafianto[2], Ahmad Zaenal Arifin[3]
[1]Universitas PGRI Ronggolawe, [2]Universitas PGRI Ronggolawe, [3]Universitas PGRI Ronggolawe
[1]aminkhoirul1414@gmail.com, [2]kresnaoktafianto@unirow.ac.id, [3]az_arifin@unirow.ac.id

Abstrak

Penyakit Tuberculosis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri Mycrobacterium Tuberculosis dan dapat menular melalui udara. Oleh karena itu, dibutuhkan analisis secara ilmiah untuk menganalisis penyebaran penyakit Tuberculosis. Salah satu analisis yang dapat dilakukan yaitu membuat model matematika SIR. Model matematika SIR menggambarkan individu yang belum terinfeksi dan rentan terinfeksi (Susceptible) individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit ke sejumlah individu lain (Infectious) dan individu yang telah sembuh atau bebas dari penyakit (Recovered). Pada tahun 2012 sampai tahun 2016 menurut Profil Kesehatan Kabupaten Tuban jumlah penderita Penyakit Tuberculosis di Kabupaten tuban mencapai 4.441 penderita, jumlah penderita yang mencapai 4.441 menjadikan penyakit Tuberculosis sebagai penyakit menular yang paling banyak diderita penduduk Kabupaten Tuban pada tahun 2012 sampai tahun 2016. Berdasarkan analisis model SIR didapatkan titik ekulibrium bebas penyakit (E0) dan titik ekulibrium endemik penyakit (E1), titik ekuilibrium bebas penyakit (E0) akan bersifat stabil ketika R0 < 1 dengan nilai E0 = (1, 0, 0), sedangkan titik ekulibrium endemik penyakit akan bersifat stabil ketika R0 > 1 dengan nilai E1 = (0.2107181875, 0.7719892482, 0.01729256435).

Kata Kunci : *Analisis Kestabilan; Model SIR; Titik Ekulibrium Tubeculosis*.

PENDAHULUAN

Kesehatan merupakan hal yang sangat penting dalam kehidupaan manusia, karena apabila kesehatan seseorang mengalami gangguan maka aktivitas seseorang tersebut juga ikut terganggu. Masalah kesehatan yang sering menjadi perhatian masyarakat adalah penyakit menular karena masyarakat harus waspada terhadap penularan penyakit tersebut melalui interaksi di dalam rantai infeksi baik secara langsung maupun tidak langsung. Salah satu contoh penyakit penyakit menular adalah *Tuberculosis* (TB). Penyakit *Tuberculosis* disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberculosis*. Pada tahun 2012 sampai tahun 2016 menurut Profil Kesehatan Kabupaten Tuban jumlah penderita Penyakit *Tuberculosis* di Kabupaten tuban mencapai 4.441 penderita. Salah satu pendekatan untuk mencari solusi pada penyebaran penyakit *Tuberculosis* yaitu model matematika. Model matematika adalah representasi dan penjelasan mengenai permasalahan dalam dunia nyata ke dalam pernyataan matematik supaya didapatkan suatu solusi [1]. Model matematika yang digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit *Tuberculosis* terdapat beberapa model, salah satunya adalah model SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*). Model SIR digunakan untuk mengetahui model matematika pada penyebaran penyakit *Tuberculosis* dengan model SIR, mengetahui analisis titik ekuilibrium model SIR pada penyebaran penyakit *Tuberculosis*, dan mengetahui analisis kestabilan titik ekuilibrium model SIR pada penyebaran penyakit *Tuberculosis*.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian

Penelitian kuantitatif adalah pendekatan-pendekatan terhadap kajian empiris untuk mengumpulkan, menganalisa, dan menampilkan data dalam bentuk numerik dari pada naratif. Penelitian ini menggunakan desain penelitian kuantitatif karena menggunakan data penderita *Tuberculosis* di Kabupaten Tuban tahun 2012-2016 dan penduduk Kabupaten Tuban pada tahun 2012-2016, dikarenakan pada selang tahun tersebut jumlah penderita *Tuberculosis* merupakan jumlah penderita penyakit menular yang terbanyak di Kabupaten Tuban.

Metode Analisis Data

Langkah-langkah dalam melakukan model matematika pada penyebaran penyakit *Tuberculosis* adalah:

1. Menentukan model matematika penyebaran penyakit *Tuberculosis*.
2. Menentukan titik ekuilibrium penyebaran penyakit *Tuberculosis*.
3. Menentukan bilangan reproduksi dasar pada penyebaran penyakit *Tuberculosis*.
4. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium.
5. Menganalisis secara numerik model matematika pada penyebaran penyakit *Tuberculosis*.

Adapun rancangan penelitianini adalah:

1. Studi lapangan dan studi literatur.
2. Perumusan masalah.
3. Pengumpulan data.
4. Pemodelan data.
5. Penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebagai salah satu penyakit menular yang dapat menyebabkan kematian, tentulah penyakit *Tuberculosis* memerlukan suatu solusi untuk menanggulanginya. Salah satu solusi untuk menanggulangi penyakit *Tubercuosis* ialah dengan model matematika. Terdapat beberapa model matematika yang dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit *Tuberculosis*, salah satunya ialah model SIR. Pada model ini, populasi dibagi menjadi tiga bagian yaitu *Susceptible*, *infectious*, dan *Recovered.*

Populasi *Susceptible* diperoleh dari $\frac{dS}{dt} = \pi - \mu_2 S(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}$ yaitu besarnya laju populasi yang rentan dipengaruhi oleh populasi yang lahir dalam populasi π dan akan menurun dengan $\mu_2 S(t)$ serta populasi terinfeksi $\frac{\beta I(t)S(t)}{N}$.

Untuk populasi *Infectious* diperoleh dari $\frac{dI}{dt} = \frac{\beta I(t)S(t)}{N} - (\gamma + \mu_2 + \mu_1)I$ yaitu besarnya laju populasi terinfeksi $\frac{\beta I(t)S(t)}{N}$ akan menurun dengan adanya populasi yang sembuh $\gamma I(t)$, laju kematian alami $\mu_2 I(t)$, serta laju kematian akibat Penyakit *Tuberculosis* $\mu_1 I(t)$.

Sedangkan untuk populasi *Recovered* diperoleh dari $\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu_2 R(t)$ yaitu besarnya laju populasi yang sembuh dipengaruhi oleh kesembuhan dari populasi terinfeksi $\gamma I(t)$ serta akan menurun dengan adanya laju kematian alami $\mu_2 R(t)$. Model SIR dari penyebaran penyakit *Tuberculosis* adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \mu_1 I(t) + \mu_2 - \mu_2 S(t) - \beta I(t)S(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta I(t)S(t) - (\gamma + \mu_2 + \mu_1)I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu_2 R(t)$$

Dengan $N = S + I + R$, dan $\mu_1, \mu_2, \beta, \gamma > 0$

Analisis Model SIR Pada Penyebaran Penyakit *Tuberculosis*

1. Titik Ekuilibrium

Untuk mencari titik ekuilibrium dari persamaan (1), diberikan $\frac{dS(t)}{dt} = 0$, $\frac{dI(t)}{dt} = 0$, dan $\frac{dR(t)}{dt} = 0$.

Dengan demikian diperoleh dua titik ekuilbrium yaitu:

i. Titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$

ii. Titik ekulibrium endemik penyakit $E_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{(\gamma+\mu_2+\mu_1)}{\beta}, \frac{\mu_2}{\gamma+\mu_2}\left(1 - \frac{(\gamma+\mu_2+\mu_1)}{\beta}\right), \frac{\gamma}{\gamma+\mu_2}\left(1 - \frac{(\gamma+\mu_2+\mu_1)}{\beta}\right)\right)$

2. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. [3] menyatakan metode yang digunakan dalam penurunan R_0, yaitu metode pendekatan operator selanjutnya. Berdasarkan metode pendekatan operator generasi selanjutnya, maka untuk persamaan (1) berlaku:

$$X = (S, R), Z = I$$
$$f_S(X,Z) = -\beta S(t)I(t) + \mu_1 I(t) + \mu_2 - \mu_2 S(t),$$
$$f_R(X,Z) = \gamma I(t) - \mu_2 R(t),$$
$$h(X,Z) = \beta S(t)I(t) - (\gamma + \mu_2 + \mu_1)I(t).$$

a. Misalkan $U_0 = (X^*, 0) = (S^*, R^*, 0)$ adalah titik ekulibrium bebas penyakit, maka:

  i. $f_R(X,Z) = 0$, sehinnga diperoleh $R^* = 0$

  ii. dari $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, diperoleh $S^*(t) = 1$, sehingga $U_0 = (X^*, 0) = (S^*, R^*, 0) = (1,0,0)$

b. Misalkan $K = \frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, 0)$, karena $\frac{\partial}{\partial I} h(S^*, R^*, 0) = \beta - (\gamma + \mu_2 + \mu_1)$ maka $K = \beta - (\gamma + \mu_2 + \mu_1).K$ dapat ditulis dalam bentuk $K = M - D$ dengan $M = \beta$ dan

$D = \gamma + \mu_2 + \mu_1$, sehingga
$R_0 = MD^{-1} = \frac{\beta}{\gamma+\mu_2+\mu_1}$

3. Analisis Kestabilan

a. Analisis Kestabilan Titik Ekulibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit merupakan suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam populasi karena jumlah subpopulasi individu terinfeksi pada saat waktu t sama dengan nol. Titik ekuilibrium pada saat bebas penyakit ialah $E_0 = (S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$, sehingga matriks Jacobiannya adalah

$$MJ_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial R} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial R} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial R} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_2 - \beta I_0(t) & -\beta S_0(t) + \mu_1 & 0 \\ \beta I_0(t) & \beta S_0(t) - (\gamma + \mu_2 + \mu_1) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan nilai E_0 ke dalam MJ_0, didapatkan

$$MJ_0 = \begin{bmatrix} -\mu_2 & -\beta + \mu_1 & 0 \\ 0 & \beta - (\gamma + \mu_2 + \mu_1) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari MJ_0 dapat dicari dengan

$\det(\lambda I - MJ_0) = 0$

Sehingga didapatkan

$\lambda_{1,2} = -\mu_2, \lambda_3 = \gamma + \mu_2 + \mu_1(R_0 - 1)$

Jika $R_0 < 1$ maka didapatkan nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, sehingga E_0 bersifat stabil dan akan bersifat tidak stabil jika $R_0 > 1$

b. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Titik ekuilibrium endemik penyakit merupakan suatu keadaan dimana terjadi penyebaran penyakit menular dalam populasi karena jumlah subpopulasi individu terinfeksi pada saat waktu t tidak sama dengan nol. Titik ekulibrium pada saat endemik penyakit ialah

$$E_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{(\gamma + \mu_2 + \mu_1)}{\beta}, \frac{\mu_2}{\gamma + \mu_2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \frac{\gamma}{\gamma + \mu_2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right)$$

maka matriks jacobiannya adalah

$$MJ_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial j}{\partial S} & \frac{\partial j}{\partial I} & \frac{\partial j}{\partial R} \\ \frac{\partial k}{\partial S} & \frac{\partial k}{\partial I} & \frac{\partial k}{\partial R} \\ \frac{\partial l}{\partial S} & \frac{\partial l}{\partial I} & \frac{\partial l}{\partial R} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\mu_2 - \beta I_1(t) & -\beta S_1(t) + \mu_1 & 0 \\ \beta I_1(t) & \beta S_1(t) - (\gamma + \mu_2 + \mu_1) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari MJ_1 dapat dicari dengan

$\det(\lambda I - MJ_1) = 0$

Sehingga didapatkan

$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

Dengan

a. $a_3 = 1$

b. $a_2 = \mu_2 + \frac{\beta\mu_2}{\gamma+\mu_2} - \frac{\beta\mu_2}{R_0(\gamma+\mu_2)}$

c. $a_1 = \frac{\beta\mu_2\gamma}{\gamma+\mu_2} - \frac{\beta\mu_2\gamma}{R_0(\gamma+\mu_2)} + \frac{\beta\mu_2^2}{\gamma+\mu_2} - \frac{\beta\mu_2^2}{R_0(\gamma+\mu_2)}$

d. $a_0 = \frac{\mu_2^2\gamma\beta}{\gamma+\mu_2} - \frac{\mu_2^2\gamma\beta}{R_0(\gamma+\mu_2)} + \frac{\mu_2^3\beta}{\gamma+\mu_2} - \frac{\mu_2^3\beta}{R_0(\gamma+\mu_2)}$

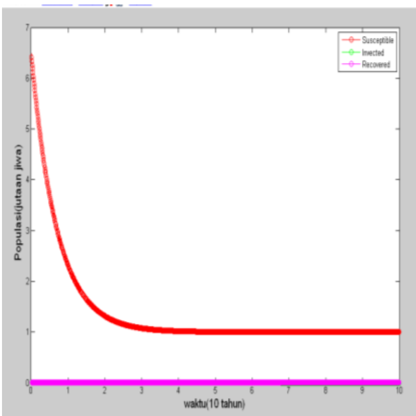
Dengan menggunakan Tabel kestabilan *Ruth-Hurwitz* didapatkan $a_3, a_2, b_1, c_1 > 0$ ketika $R_0 > 1$ yang menyebabkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ sehingga E_1 bersifat stabil.

4. Analisis Numerik SIR Pada Penyebaran Penyakit *Tuberculosis*

a. Simulasi $R_0 < 1$

Untuk nilai $R_0 < 1$ diberikan nilai-nilai parameter supaya $R_0 < 1$, yaitu $\beta = 0{,}00015$ dan $\gamma = 0{,}027$ [3] sehingga,
$R_0 = \frac{\beta}{\gamma+\mu_2+\mu_1} = \frac{0{,}00015}{0{,}027+0{,}01428571+0{,}002251745} = 0{,}003445309332$

. Dari nilai awal dan parameter-parameter tersebut diperoleh simulasi $R_0 = 0.003445309332$ yang ditunjukkan Gambar 2

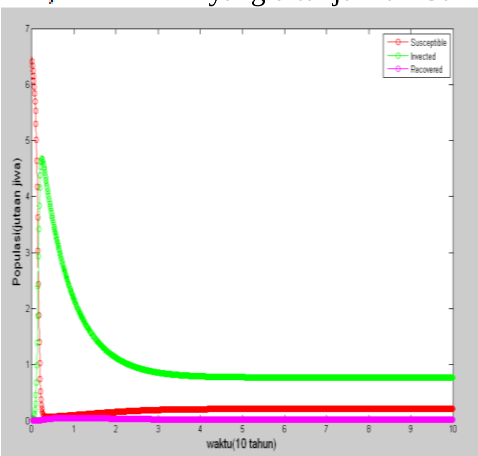


Gambar 1 Grafik Simulasi Untuk $R_0 < 1$

Pada Gambar 1. terlihat perubahan populasi S,I, dan R terhadap waktu. Populasi S akan mengalami penurunan akan tetapi tidak menuju ke nol, sedangkan untuk nilai I dan R mendekati nol atau bahkan sama dengan nol. Hal ini menunjukkan bahwa pada saat $R_0 < 1$ penyakit *Tuberculosis* akan hilang dari populasi, dengan nilai numerik $E_0 = (S_0, I_0, R_0) = (1{,}0{,}0)$, artinya $S_0 = 1.000.000$ jiwa

b. Simulasi $R_0 > 1$

Untuk nilai $R_0 < 1$ diberikan nilai-nilai parameter supaya $R_0 < 1$, yaitu $\beta = 0{,}08$ dan $\gamma = 0{,}00032$ [4]. Dari nilai awal dan parameter-parameeter tersebut diperoleh simulasi $R_0 = 4{,}745674836$ yang ditunjukkan Gambar 2



Gambar 2 Grafik Simulasi Untuk $R_0 > 1$

Pada Gambar 2. terlihat perubahan populasi S ,I, dan R terhadap waktu. Populasi S mulai menurun ketika $t < 1$ dan populasi I mulai meningkat melebihi populasi S ketika $t < 1$. Pada Gambar 2 terlihat bahwa populasi R juga meningkat akan tetapi nilai populasi R tidak dapat mempengaruhi nilai dari S. Hal tersebut dapat dikatakan bahwa pada saat $R_0 > 1$ penyakit *Tuberculosis* akan menjadi endemik, dengan nilai numerik

$E_1 = (S_1, I_1, R_1) =$
$(0.2107181875, 0.7719892482, 0.01729256435)$
, artinya $S_1 = 210.072$ jiwa, $I_1 = 771.989$ jiwa, dan $R_1 = 172.926$ jiwa

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari model tersebut antara lain model matematika untuk penyebaran penyakit *Tuberculosis* berupa sistem persamaan differensial orde satu yaitu $\frac{dS}{dt} = \mu_1 I(t) + \mu_2 - \mu_2 S(t) - \beta I(t)S(t)$, $\frac{dI}{dt} = \beta I(t)S(t) - (\gamma + \mu_2 + \mu_1)I(t)$, dan $\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \mu_2 R(t)$, analisis titik ekuilibrium model penyebaran penyakit *Tuberculosis* yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (S_0, I_0, R_0) = (1, 0, 0)$ dan titik ekuilibrium endemik penyakit $E_1 = (S_1, I_1, R_1) = \left(\frac{(\gamma+\mu_2+\mu_1)}{\beta}, \frac{\mu_2}{\gamma+\mu_2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \frac{\gamma}{\gamma+\mu_2}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right)$, dan analisis kestabilan model penyebaran penyakit *Tuberculosis* yaitu pada kondisi $R_0 < 1$ titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal. Artinya dalam jangka waktu tertentu penderita penyakit *Tuberculosis* akan semakin berkurang atau bahkan menghilang dan pada kondisi $R_0 > 1$ titik ekulibrium bebas penyakit bersifat tidak stabil. Artinya dalam jangka waktu tertentu penderita penyakit *Tuberculosis* akan tetap ada.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Widowati & Sutimin. 2007. *Pemodelan Matematika*. Semarang: Universitas Diponegoro.

[2] Sari, I. & Tasman, H. 2014. *Model Epidemik SIR untuk Penyakit yang Menular Secara Horizontal dan Vertikal*. Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII, 758. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. 11-14 Juni.

[3] Fredlina, K. Queena, dkk. 2012. Model SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) Untuk Penyebaran Penyakit Tuberculosis. *E-jurnal Matematika*, 1, 52-58

[1] [4] Rossitarini, O. 2017 *Analisis Numerik Model Epidemik SIR (Susceptible, Infectious, Recovered) Pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis Di Yogyakarta*. SKRIPSI. Tidak Diterbitkan. Yogyakarta: Program Sarjana UNY.