Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

PENERAPAN TEORI HIMPUNAN UNTUK MENETAPKAN FPB DAN KPK BILANGAN BULAT

Midjan

FKIP Prodi Matematika UMG, Jl Sumatera 101 Gresik,61121 Gresik.
G-mail: midjanmpd@gmail.com, E-mail: m. midjan@yahoo.com.

Abstrak

Penelitian ini adalah mengkaji pustaka, mengembangkan konsep perumusan FPB dan KPK suatu bilangan. Pengkajian bertujuan untuk menetapkan FPB dan KPK yang berkaitan dengan penerapan konsep teori himpunan. Untuk menetapkan FPB, dari dua bilangan atau lebih adalah berdasar pada himpunan pembagi bilangan bulat, atau himpunan faktorisasi bilangannya. Jika himpunan pembagi bilangan bulat adalah himpunan A untuk bilangan bulat a, dan himpunan B untuk bilangan bulat b, maka FPB (a, b) = A $\cap$ B. Analog jika himpunan berasal dari himpunan faktorisasi bilangan bulat. FPB juga dapat dicari dengan Metode Algoritma Euclide .Jika FPB telah dapat ditetapkan, baik untuk dua bilangan, atau tiga bilangan maka perumusan KPK adalah berikut:

$KPK\ (a,b) = \dfrac{a.b}{FPB(a,b)}$, *dan* $KPK\ (a,b,c) = \dfrac{a.b.c.\ .FPB\ (a,b,c)}{FPB(a,b).FPB(a,c).FPB(b,c)}$, *serta*

berlaku pula konversi konsep teori himpunan untuk KPK (a,b), dan KPK(a,b,c) , dengan merubah konsep penjumlahan menjadi perkalian, dan konsep pengurangan menjadi pembagian pada prinsip Inklusi – Eksklusifnya..

Kata kunci:
Himpunan pembagi bilangan bulat , Himpunan kelipatan bilangan bulat.
FPB dan KPK suatu bilangan.

1. PENDAHULUAN.

1.1. FPB dan KPK

Dalam membahas Pembagi Persekutuan Terbesar (PPT) atau Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dua bilangan atau lebih, terdapat berbagai cara dapat dilakukan, diantaranya adalah dengan memfaktorkan bilangan menjadi factor prima, atau menghimpun pembagi bilangan dalam suatu himpunan. Pada bilangan bulat a, dengan himpunan faktor prima A= { a_1, a_2, a_3,… }, dan bilangan bulat b dengan himpunan factor prima B = {b_1, b_2, b_3, …} , maka akan terdapat diantaranya, misal $a_n = b_m$, factor prima bilangan a sama dengan factor prima bilangan b. Faktor prima ke 2 bilangan ini kita sebut factor persekutuan bilangan a dan b, dinyatakan FPB (a,b), FPB (a,b) = A $\cap$ B = $a_n = b_m$.

Demikian pula jika terdapat himpunan pembagi bilangan bulat a dalam himpunan A: p_1, p_2, p_3,…p_m dan himpunan pembagi bilangan bulat dalam himpunan B:

b_1, b_2, b_3, … b_n terdapat pembagi persekutuan ke 2 himpunan, misal $p_m = b_n$, maka PPT (a,b) = $p_m = b_n$ atau FPB (a,b) = $a \cap b = p_m = b_n$. Untuk dua bilangan yang sama, baik untuk PPT atau FPB mempunyai pengertian yang sama, selanjutnya dalam penelitian ini seterusnya kita sebut dengan FPB.

Dalam bagian ini akan dibahas pula kelipatan bilangan persekutuan, dan sebelumnya perlu diingat bahwa jika b|c, maka c kelipatan b. Himpunan bilangan bulat positif kelipatan 5 dapat ditulis sebagai (5, 10, 15, 20, 25, …). masing-masing elemen dalam himpunan ini mempunyai bentuk 5k, k adalah bilangan bulat positif. Secara umum, dapat dikatakan bahwa kelipatan bilangan bulat positif c adalah kc, k = 1, 2, 3,…., Sebagai contoh dapat diambil himpunan bilangan bulat positif kelipatan 2 adalah : (2, 4, 6, 8, **10**, 2k, …)

Himpunan kelipatan persekutuan kedua himpunan di atas, yakni himpunan kelipatan 5 = (5, 10, 15, 5k,..) dan himpunan kelipatan 2 = (2, 4, 6, 8, **10**, … 2k, …). Berdasarkan teori set, kita dapatkan bahwa irisan kedua himpunan, yaitu himpunan (10, 20, 30, ….). Jika m adalah kelipatan persektuan dari dua bilangan bulat positif b dan c, maka m kelipatan b dan m kelipatan c. Kelipatan persekutuan bilangan bulat 2 dan 5 adalah 10, atau KPK (2,5) = 10, adalah himpunan persekutuan kelipatan 2 dan 5 yang terkecil. Pada himpunan kelipatan 6: (6, 12, **18**, 24, …) dan himpunan kelipatan 9: (9, **18**, 27, 36, ….). irisan kedua himpunan kelipatan persekutuan adalah (**18**, **36, 54,** …). kelipatan persekutuan terkecil dari 6 dan 9, adalah 18 dan KPK (6,9) = 18.

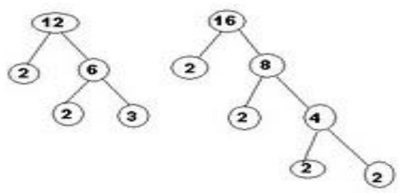
WWW.BELAJAR-MATEMATIKA.COM

"Suatu bilangan bulat positif m adalah kelipatan persekutuan terkecil dan disingkat KPK dari bilangan bulat *b* dan *c*, jika b dan c dapat membagi habis m, b|m dan c|m, m adalah bilangan bulat positif terkecil". G, Muhsetyo, (1985)

Jadi, kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan bulat adalah bilangan bulat positif terkecil yang dapat dibagi oleh kedua bilangan. Misal kita ambil KPK dari 6 dan 8 adalah 24; karena himpunan kelipatan bilangan bulat 6 = (6, 12, 18, 24, 30, 36, , …), dan 8 = (8, 16, 24, 32, 40, 48, …) dan himpunan kelipatan persekutuan bilangan bulat 6 dan 8 adalah: (24, 48, 72, 72, ….24k) .

Proses untuk mendapatkan kelipatan persekutuan terkecil adalah mencari himpunan kelipatan persekutuan dengan memilih bilangan terkecil dalam himpunan itu, sedangkan proses atau cara lain dipikirkan dengan metode faktorisasi prima. Singkatan dari kependekan lain dari kelipatan persekutuan terkecil adalah KPT dan seterusnya dalam penelitian ini kita sebut KPK.

Menetapkan FPB dan KPK menggunakan pola pohon faktor.



Gambar 1: Pohon factor bilangan 12 dan 16

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$, dan $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

FPB (12, 16): $2^2 = 4$, KPK (12, 16) : $2^4 \times 3 = 16 \times 3 = 48$,

Menetapkan dengan cara yang lain, Rumus menetapkan KPK:

$$\frac{16 \times 12}{4} = \frac{16 \times \cancel{12}^{\,3}}{\cancel{4}} = 48$$

http://2.bp.blogspot.com/-btyGt9Eu5Zs/

Cara lain Menetapkan KPK untuk dua bilangan dapat diikuti pada contoh berikut:
Contoh : a) carilah KPK dari 144 dan 180

Jawab: KPK (144, 180) = $\frac{144\ .180}{PPT\ (144{,}180)} = \frac{144\ .180}{36} = 720$

Contoh: b). KPK (24, 15, 20, 6) dengan faktorisasi matrik.

2	24	15	20	6
3	12	15	10	3
5	4	5	10	1
2	4	1	2	1
	2	1	1	1

KPK (24, 15, 20, 6) = 2.3.5.2.2.1.1.1 = 120

(G, Muhsetyo; 1985)

Gambar 2: Menetapkan KPK dengan metode Faktorisasi Matrik

c). menetapkan terlebih dahulu FPBnya. Jika p|a dan p|b, a : p = c dan b : p = d, FPB (a, b) = d, maka KPK adalah berikut:

a	b	p
c	d	

KPK (a,b) = p.c.d

Contoh:

12	30	6
2	5	

KPK (12,30) = 6.2.5 = 60

Gambar 3: Menetapkan KPK berdasarkan FPB

http://apiqquantu.com/2009/08/B/mudah-dan-asyik-menentukan-kpk-fpb-denga-inovasi pembelajaran Matematika Kreatif- apiq/
http://www.gunadarma.com , diakses 20 februari 2014

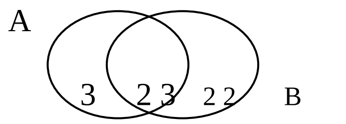
KPK dari tiga bilangan bulat positif atau lebih dapat dicari secara sepasang demi sepasang. Misalnya dicari KPK dari a, b, c dan d, maka dicari dahulu KPK (a, b) = m_1, kemudian dicari KPK (c, d) = m_2. Maka KPK (a, b, c, d) adalah KPK (m_1, m_2).

1.1.2. FPB, KPK dan Konsep Teori Himpunan

Berdasarkan uraian diatas, baik untuk menetapkan FPB atau KPK dapat dilakukan dengan bantuan penerapan konsep teori himpunan. Sedangkan secara intuitif, sebuah himpunan adalah sebuah daftar kumpulan atau kelompok obyek-obyek yang didefinisikan dengan jelas. Pengertian obyek–obyek dalam himpunan dapat berupa apa saja: bilangan, surat, sungai, benua, nama kota, dsb. Obyek-obyek ini disebut elemen atau anggota himpunan (P. Silaban: 1989). Pendefinisian keanggotaan himpunan dapat juga dilakukan dengan cara mendaftar anggotanya sedemikian hingga jelas persyaratan keanggotaannya, yaitu ketentuan yang menetapkan apakah suatu obyek tertentu adalah anggota dari sebuah himpunan dimaksud atau tidak.

Sebuah himpunan dinyatakan dengan huruf besar: A, B, C, dan seterusnya, sedang elemen himpunan dinyatakan dengan huruf kecil: a, b, c,.., z. Mendefinisikan suatu himpunan dengan cara menyatakan secara jelas persyaratan keanggotaannya, Jika himpunan A terdiri dari bilangan, maka dinyatakan A = (1, 3, 5, 7), cara menyatakan himpunan secara mendaftar.

Jika A adalah himpunan faktorisasi bilangan bulat 18, $A = 2.3^2$, A = {2, 3, 3}, dan B adalah himpunan faktorisasi prima 24, $B = 2^3.3$, B = {2, 2, 2, 3} Diagram Venn kedua himpunan digambarkan sebagai berikut:

A = {2, 3, 3}, dan B = {2, 2, 2, 3}		

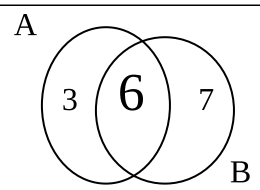
Gambar 4: Himpunan faktorisasi prima bilangan 18 dan 24

Berdasarkan gambar didapat irisan A ∩ B = {2,3}, dan gabungan A∪B = {2,2,2,3,3}, berarti hasil kali antar elemen irisan A ∩ B adalah FPB (18,24) = 6, dan hasil kali antar elemen himpunan A∪B adalah KPK (18,24) = 72, sebagaimana (G. Muhsetya, 1985).

Jka A himpunan pembagi bulat positif bilangan bulat 18, A = {1, 2, 3, 6, 9, 18}, dan B Himpunan pembagi bilangan bulat positif dari 42, B = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}. Maka A∩B = {1, 2, 3, 6, 18} merupakan himpunan pembagi persekutuan 18 dan 42 yang bulat dan positif.

Diantara pembagi persekutuan sebarang dua bilangan bulat A dan bilangan bulat B terdapat yang terbesar, disebut faktor persekutuan terbesar dari 18 dan 42, dan dinyatakan sebagai FPB (18,42) = 6.

Himpunan faktorisasi bilangan bulat A dan himpunan faktorisasi bilangan bulat B saling beririsan, terdapat unsur faktorisasi prima bilangan bulat A yang sama dengan unsure faktorisasi prima bilangan bulat B. kedua himpunan adalah berikut:

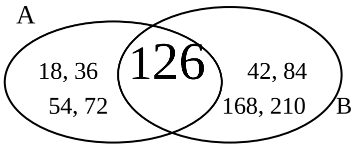
Himpunan pembagi bulat bilangan 18 dan 42 A: (1, 2, 3, 4, **6**, 9, 18) B: (1, 2, 3, **6**, 7, 14, 21, 42)	FPB = 6	
Himpunan faktorisasi prima bilangan 18 dan 42 A: (2, 3, 3) B: (2, 3, 7)		

Gambar 5: Himpunan pembagi bulat bilangan 18 dan 42 dan Himpunan Faktorisasi Prima bilangan 18 dan 42

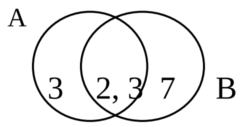
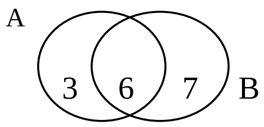
Tampak bahwa persoalan mendapatkan FPB dari dua bilangan adalah sangat sederhana, *tidak lain adalah irisan keanggotaan ke dua himpunan bilangan, yang kita dapatkan dari himpunan pembagi masing-masing atau faktorisasi primanya, adalah sebagai perkalian bilangan prima persekutuan kedua bilangan.*

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

Bila dikaji kembali bahasan himpunan bilangan bulat A dan himpunan bilangan bulat B dengan diagram Venn kedua himpunan adalah berikut:

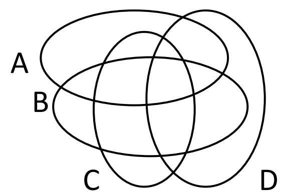
Kelipatan Bilangan 18: (18, 36, 54, 72, 90, 126, 144, 162, …)		Kelipatan Bilangan 42: (42, 84, 126, 168, 210, 252, 294, 336, …)

Gambar 6a: Himpunan Kelipatan bilangan 18 dan 42

	atau	

Gambar 6b: Himpunan Faktorisasi Prima bilangan 18 dan 42
FPB (18,42) = 6Dan KPK(18,42) = AUB = 3.6.7 = 126

Kita dapatkan FPB dan KPK ke dua bilangan baik dari himpunan faktorisasi prima atau himpunan pembagi bulat ke dua bilangan. Penggunaan diagram VENN dapat dimanfaatkan baik untuk tiga bilangan, bahkan untuk empat, lima bilangan atau lebih. Untuk empat bilangan dapat dimanfaatkan diagram VENN dengan empat himpunan yang salaing beririsan berikut:



Gambar 7: Relasi antar himpunan ($A \cap B \cap C \cap D$)

(Midjan: 2007, Proceding Seminar Mat UNY)

Jika himpunan A, B, C, dan D merupakan himpunan faktor prima dari bilangan a, b, c dan d, maka akan didapatkan FPB (a, b), FPB (a, c), FPB (a, c), FPB (b, c), FPB (b, d), dan FPB (c, d), dari hasil operasi irisan masing-masing yang dapat dipakai untuk menetapkan KPK , bahkan untuk lima bilangan atau lebih tanpa memanfaatkan diagram VENN, yakni berdasarkan perumusan Inklusi-Eksklusifnya.

1.2. Permasalahan

Berdasarkan uraian sebagaimana disebutkan di atas tampak bahwa ada beberapa cara dapat dilakukan untuk menetapkan PPT atau FPB dan KPT atau KPK suatu bilangan yang memanfaatkan konsep teori himpunan secara kurang konsisten tuntas. Maka pertanyaan penelitian yang diungkap pada makalah ini adalah: "Bagaimana

Penerapan Teori Himpunan Untuk Menentukan FPB dan KPK Suatu Bilangan Bulat ? ”.

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah mengembangkan lebih lanjut konsep teori himpunan untuk menetapkan FPB dan KPK menjadi lebih sederhana dan praktis.

2. HASIL dan PEMBAHASAN

2. 1. Hasil Kajian.

Berdasarkan kajian dapat dikatakan bahwa**:**

(1) . Pada dua bilangan a dan b FPB (a, b) adalah p, jika p dapat membagi habis bilangan a dan b. Maka p|a, dan p|b, dan p bilangan terbesar pembagi a atau b, FPB (a, b, c) adalah p, jika p dapat membagi habis bilangan a, b, dan c. Maka, p|a, p|b, p|c, dan p bilangan terbesar pembagi bilangan a, b atau c.

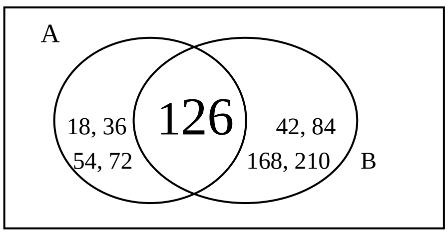
(2). Pada dua bilangan a dan b**,** KPK (a, b) adalah q, jika a dan b dapat membagi habis bilangan q dan bilangan q bilangan terkecil, maka a|q, dan b|q, KPK (a , b, c) adalah q, jika a, b, dan c dapat membagi habis bilangan q, maka berlaku q|a, q|b, q|c, dan q bilangan terkecil yang dapat dibagi atau menjadi kelipatan bilangan a, b atau c.,

2.1. 1. Penetapan Faktorisasi Persekutuan Terbesar.

Baik penetapan FPB untuk dua bilangan bilangan a dan b atau lebih dapat diperoleh dengan cara: (a). membuat himpunan faktorisasi prima bilangan masing-masing dan irisan ke dua himpunan faktorisasi prima adalah FPBnya. (b). membuat himpunan pembagi bilangan masing-masing dan irisan ke dua himpunan pembagi kedua bilangan adalah FPBnya. (c). FPB juga dapat ditetapkan dengan konsep keterbagian bilangan sebagaimana Algoritme Euclide.

2.1. 2. Penetapan Kelipatan Persekutuan Terkecil.

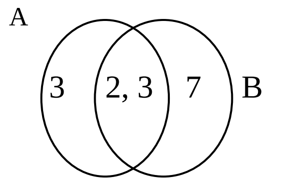
Penetapan KPK diperoleh dengan cara: a. Operasi irisan dua himpunan kelipatan kedua bilangan dengan diagram Venn himpunan berikut:

Kelipatan Bilangan 18: (18, 36, 54, 72, 90, 126, 144, 162, …)		Kelipatan Bilangan 42: (42, 84, 126, 168, 210, 252, 294, 336, …)

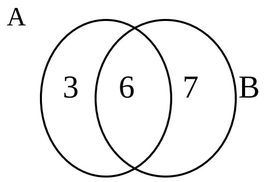
Gambar 8a: Himpunan Kelipatan bilangan 18 dan 42

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

b. KPK adalah: Operasi gabungan dua himpunan faktorisasi prima kedua bilangan dengan diagram Venn berikut:



atau



Gambar 8b: Himpunan Faktorisasi Prima bilangan 18 dan 42

KPK(18,42) = AUB = 3.6.7 = 126

c). Dengan metode matrik pembagian atau sengkedan

Contoh: menetapkan KPK (24, 15, 20, 6) dengan faktorisasi matrik.

2	24	15	20	6
3	12	15	10	3
5	4	5	10	1
2	4	1	2	1
	2	1	1	1

KPK (24, 15, 20, 6) = 2.3.5.2.2.1.1.1 = 120

(G, Muhsetyo; 1985)

Gambar 9: Menetapkan KPK dengan metode Faktorisasi Matrik

d. Cara lain menetapkan KPK, dengan cara menetapkan terlebih dahulu FPBnya. Jika p|a dan p|b, a : p = c dan b : p = d, FPB(a,b) = d, maka KPK adalah berikut:
Cara lain menetapkan KPK, dengan menetapkan terlebih dahulu FPBnya. Jika p|a dan p|b, a : p = c dan b : p = d, FPB(a,b) = d, maka KPK adalah berikut:

a	b	p
c	d	

KPK (a,b) = p.c.d

Contoh:

12	30	6
2	5	

KPK (12,30) = 6.2.5 = 60

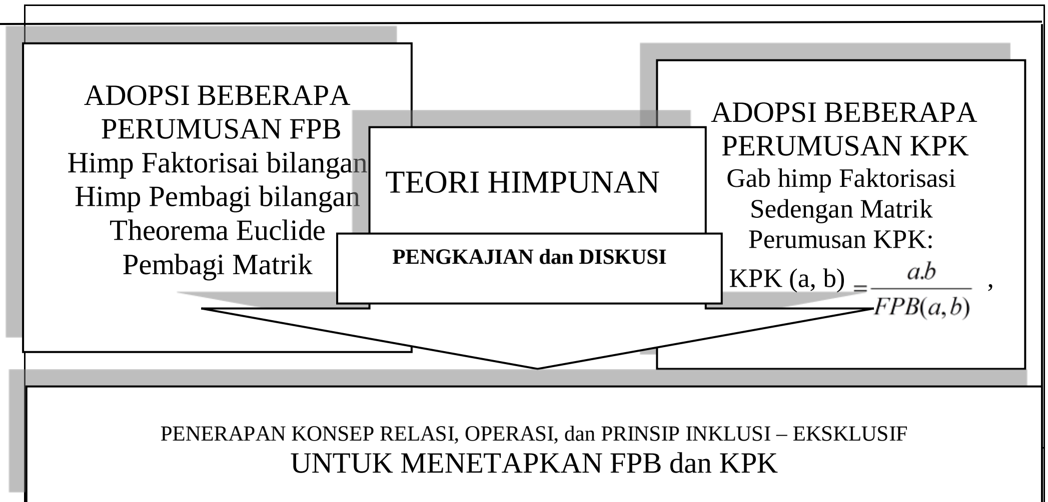
Gambar 10: Menetapkan KPK berdasarkan FPB

e.). Perumusan KPK (a, b) $= \dfrac{a.b}{FPB(a,b)}$, berdasar nilai FPB.

KPK dari tiga bilangan bulat positif atau lebih dapat dicari sepasang demi sepasang. Menetapkan KPK (a, b, c, d), maka dicari terlebih dahulu KPK (a, b) yaitu m_1, kemudian KPK (c, d) yaitu m_2. Maka KPK (a, b, c, d) adalah KPK (m_1 , m_2).

2.2. HASIL KAJIAN DAN PEMBAHASAN.

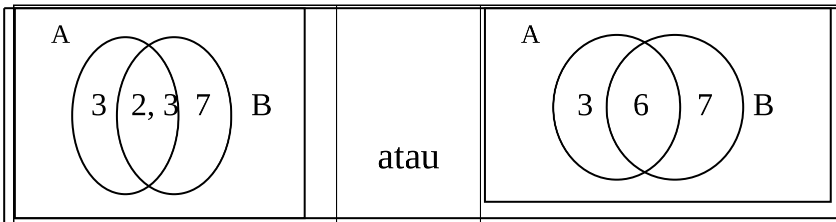
. Pembahasan untuk menetapkan FPB dan KPK kita ikuti tahapan pengkajian dengan schema berikut:



Gambar 11: Rancangan Penelitian.

Berdasarkan hasil kajian, diambil

a. KPK adalah: Operasi gabungan dua himpunan faktorisasi prima kedua bilangan dan FPB adalah irisan dua himpunan faktorisasi prima kedua dengan diagram VENN berikut:



Gambar 3b: Himpunan Faktorisasi Prima bilangan 18 dan 42

KPK(18,42) = AUB = 3.6.7 = 126

b. Jika KPK adalah: Operasi gabungan dua himpunan faktorisasi prima kedua bilangan , maka bersesuaian dengan perumusan berikut

KPK (a, b) $= \frac{a.b}{FPB(a,b)}$, yakni berdasarkan nilai FPB.

Berarti KPK (a,b) = AUB Selanjutnya akan kita dapatkan untuk tiga bilangan bulat a, b, dan c perumusan KPK

KPK (a,b,c) $= \frac{a.b.c.FPB(a.b.c)}{FPB(a.b.).FPB(a.c).FPB(b.c)}$, dan berlaku prinsip Inklusi-Eksklusif dengan merubah konsep penjumlahan menjadi perkalian, pengurangan menjadi pembagian pada konsep teori himpunan.

3. KESIMPULAN

3.1. Kesimpulan

Pengkajian berdasarkan beberapa refrensi tentang penetapan FPB dan KPK yang sudah baku dan secara umum telah dipahami dan banyak dimanfaatkan dalam berbagai permasalahan matematika. Merumuskan untuk menetapkan FPB, adalah irisan himpunan pembagi bilangan bulat a dan b, maka FPB (a,b) = $A \cap B$, dengan A adalah himpunan pembagi bilangan bulat a dan B adalah himpunan pembagi bilangan bulat b. Analog jika A adalah himpunan kelipatan bilangan bulat a, dan B adalah himpunan kelipatan bilangan bulat b.

maka KPK (a,b) $= \dfrac{a.b}{FPB(a,b)}$, pengkajian lanjut untuk tiga bilangan bulat a, b, dan c, dapat ditetapkan bahwa: FPB (a,b,c) = $A \cap B \cap C$, dan

KPK (a,b,c) $= \dfrac{a.b.c.FPB(a.b.c)}{FPB(a.b.).FPB(a.c).FPB(b.c)}$, serta berlaku pula konversi konsep teori himpunan untuk KPK (a,b) = AUB dan KPK(a,b,c) = AUBUC, dengan merubah konsep penjumlahan, pengurangan pada konsep teori himpunan menjadi perkalian, dan pengurangan pada konsep penetapan KPK berdasar FPB atau dapat juga memanfaatkan diagram VENN sebagaimana berlaku pada konsep teori himpunan.

4.1. Saran.

Bahwa penetapan FPB dan KPK dengan penerapan konsep teori himpunan diharapkan dapat menyederhanakan perumusan, namun kritik dan kajian lanjut perlu dilakukan penggunaan konsep yang bersesuaian antara konsep penetapan FPB dan KPK dan konsep teori himpunan.

5. KEPUSTAKAAN

Aplikasi Pembelajaran Untuk Menghitung FPB dan KPK Dengan Bahasa Pascal, 2004. *www.BELAJAR .MATEMATKA.COM*

G, Muhsetyo, 1985. *Pengantar Teori Bilangan*, Sinar Wijaya, Surabaya.

Midjan, 2007, *Perkembangan Prinsip Inklusi-Eksklusi Lanjut*, Proceding Seminar Nasional Matematika UNY, Yogjakarta.

Menghitung FPB dan KPK Di Sekolah Dasar, 2009.

http://apiqquantu.com/2009/08/B/mudah-dan-asyik-menentukan-kpk-fpb-dengan-inovasi pembelajaran Matematika Kreatif- apiq/
diakses `4 februari 2014

Menghitung FPB dan KPK, 2009.
http://www.gunadarma.com diakses 20 februari 2014.

Rinardi Munir, 2005, Matematika Diskrit, Informatika, Bandung.