Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

SIFAT-SIFAT OPERASI *FUZZY MATRIX*

Ahmad Mahmudi
Mahasiswa Matematika, *Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW) Tuban*
ah_mahmudi@rocketmail.com

Abstrak

Fuzzy matrix adalah suatu matriks dimana elemen-elemennya terdiri dari bilangan *fuzzy* pada interval [0,1]dinotasikan dengan $\tilde{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \{a_{ij} \in [0,1], 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Seperti pada matriks real, *fuzzy matrix* juga mempunyai operasi aritmatika maupun operasi transpos. Operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan transpos *fuzzy matrix* berturut-turut didefinisikan dengan: $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{A} - \tilde{B} = max(a_{ij}, b_{jk})$, $\tilde{A}\tilde{B} = max\left(min\left(a_{ij}, b_{jk}\right)\right)$ dan $\left(\tilde{A}\right)^T = \left(a_{ji}\right)$.
Sebagaimana matriks real, *fuzzy matrix* juga memiliki sifat-sifat atau operasi-operasi tertentu, maka dalam artikel ini akan dibahas pembuktikan sifat-sifat operasi aritmatika dan operasi transpos yang berlaku pada *fuzzy matrix*.

Kata kunci: *fuzzy matrix, operasi aritmatika, operasi transpos*

I. PENDAHULUAN

Fuzzy Set pertama kali diperkenalkan oleh Prof. Dr. Lotfi Zadeh, 1965 orang Pakistan yang menjadi guru besar di *University of California at Berkeley* dalam papernya yang monumental "*Fuzzy Set*". Dalam paper tersebut dipaparkan ide dasar *fuzzy set* yang meliputi *inclusion, union, intersection, complement, relation* dan *convexity*. *Fuzzy Logic* merupakan kecerdasan buatan yang pertama kali dipublikasikan oleh Prof. Dr. Lotfi Zadeh yang berasal dari Pakistan. (lihat [18], [19], [20], [20])

Secara formal *bilangan kabur* di definisikan sebagai himpunan kabur dalam semesta semua bilangan real ℝ yang memenuhi empat sifat berikut ini :

1. Normal
2. Mempunyai pendukung yang terbatas
3. Semua potongan a-nya adalah selang tertutup dalam ℝ
4. Konveks

Fuzzy matrix adalah suatu matriks dimana elemen-elemennya terdiri dari bilangan *fuzzy* [0,1]. *Fuzzy matrix* dapat dinyatakan sebagai $\tilde{A}$ dan elemen-elemen atau entri-entri *fuzzy matrix* dapat dinyatakan sebagai a_{ij}. Sebagaimana matrik real, *fuzzy matrix* juga memiliki sifat-sifat atau operasi-operasi tertentu. Dari sifat-sifat operasi matriks real akan dibuktikan pada sifat-sifat operasi *fuzzy matrix*, dalam poses pembuktian ini akan di fokuskan pada bagaimanakah operasi pada *fuzzy matrix* dan bagaimanakah sifat-sifat operasi pada *fuzzy matrix* yakni membahas tentang operasi penjumlahan (+), pengurangan (-), perkalian (x) dan transpos pada *fuzzy matrix*. (lihat [5], [6], [12], [18], [19], [20], [21])

II. PEMBAHASAN

Dalam bagian ini penulis akan membahas beberapa materi yang dianggap relefan dalam penelitian, adapun sub materi yang akan dibahas antara lain: *fuzzy set*, *fuzzy matrix*, operasi *fuzzy matrix*, sifat-sifat operasi *fuzzy matrix*.

a. *Fuzzy Set* (lihat [7], [19], [20], [20])

Fuzzy set dalam suatu himpunan sebarang X adalah himpunan yang anggota-anggotanya dinyatakan dengan derajat keanggotaan, yang nilainya terletak dalam interval [0,1] dan ditentukan dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$.

Setiap himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan. Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaannya. Untuk semesta hingga diskrit biasanya dipakai *cara daftar*, yaitu daftar anggota dengan derajat keanggotaannya yang dibentuk sebagai himpunan pasangan berurutan $\tilde{A}$={(x_1, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_1),(x_2, $\mu_{\tilde{A}}$ (x_2),… ,(xn, $\mu_{\tilde{A}}$(x_n)}.

Komplemen dari suatu himpunan *fuzzy* A adalah himpunan *fuzzy* $\tilde{A}^{-}$diartikan sebagai "x tidak dekat A", dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}^{-}} = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), untuk\ setiap\ x \in X$$

Gabungan dua buah himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan *fuzzy* $\tilde{A}\cup\tilde{B}$, diartikan sebagai "x dekat A atau x dekat B", dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\big)\ untuk\ setiap\ x \in X$$

Irisan dua buah himpunan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan *fuzzy* $\tilde{A}\cap\tilde{B}$, diartikan sebagai "x dekat A dan x dekat B", dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\big)\ untuk\ setiap\ x \in X$$

Dua buah himpunan *fuzzy* dikatakan *beririsan* apabila irisan kedua himpunan *fuzzy* tersebut tidak sama dengan himpunan kosong. Apabila irisan dua buah himpunan *fuzzy* sama dengan himpunan kosong, maka kedua himpunan *fuzzy* tersebut dikatakan *lepas*.

Beberapa rumus irisan dan gabungan *fuzzy set* secara ringkas disajikan sebagai berikut:

1. a. $\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C} = \big(\tilde{A} \cap \tilde{B}\big) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap \big(\tilde{B} \cap \tilde{C}\big)$
   b. $\tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \big(\tilde{A} \cup \tilde{B}\big) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup \big(\tilde{B} \cup \tilde{C}\big)$
2. a. $\min\big(\tilde{A}, \tilde{B}\big) = \min\big(\tilde{B}, \tilde{A}\big) = \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$
   b. $\max\big(\tilde{A}, \tilde{B}\big) = \max\big(\tilde{B}, \tilde{A}\big) = \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$
3. a. $min\big(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\big) = min\big(min\big(\tilde{A}, \tilde{B}\big), \tilde{C}\big) = min\left(\tilde{A}, min\big(\tilde{B}, \tilde{C}\big)\right)$
   b. $\max\big(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\big) = \max\big(max\big(\tilde{A}, \tilde{B}\big), \tilde{C}\big) = \max\left(\tilde{A}, max\big(\tilde{B}, \tilde{C}\big)\right)$
4. a. $\tilde{A} \cap \big(\tilde{B} \cup \tilde{C}\big) = \big(\tilde{A} \cap \tilde{B}\big) \cup \big(\tilde{A} \cap \tilde{C}\big)$

$$\min\big[\tilde{A}, max\big(\tilde{B}, \tilde{C}\big)\big] = \max\big[min\big(\tilde{A}, \tilde{B}\big), min\big(\tilde{A}, \tilde{C}\big)\big]$$

$$\begin{aligned}\min\big[\tilde{A}, max\big(\tilde{B}, \tilde{C}\big)\big] &= min\big[max\big(\tilde{B}, \tilde{C}\big), \tilde{A}\big] \\ &= \max\big[min\big(\tilde{A}, \tilde{C}\big), min\big(\tilde{A}, \tilde{B}\big)\big] \\ &= \max\big[min\big(\tilde{C}, \tilde{A}\big), min\big(\tilde{B}, \tilde{A}\big)\big]\end{aligned}$$

   b. $\tilde{A} \cup \big(\tilde{B} \cap \tilde{C}\big) = \big(\tilde{A} \cup \tilde{B}\big) \cap \big(\tilde{A} \cup \tilde{C}\big)$

$$\max\big[\tilde{A}, min\big(\tilde{B}, \tilde{C}\big)\big] = \min\big[max\big(\tilde{A}, \tilde{B}\big), max\big(\tilde{A}, \tilde{C}\big)\big]$$

b. *Fuzzy matrix* Menurut [2] [7] [9], [12], [18], [19]

Fuzzy matrix adalah suatu matriks dimana elemen-elemennya terdiri dari bilangan *fuzzy* [0,1]. *Fuzzy matrix* dapat dapat dinyatakan sebagai $\tilde{A}$ dan elemen-elemen atau entri-enti *fuzzy matrix* dapat dinyatakan sebagai a_{ij}. Ukuran *Fuzzy matrix* adalah bayaknya baris dan kolom pada *fuzzy matrix*. Jadi *fuzzy matrix* umum $\tilde{A}$ dengan ukuran $m \times n$ di mana $m \neq n$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ di mana}$$

$a_{ij} \in [0,1], 1 \leq i \leq m;\ 1 \leq j \leq n; m \neq n.$

Fuzzy matrix baris adalah suatu *fuzzy matrix* yang hanya terdiri dari 1 baris. *Fuzzy matrix* baris dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan;

$$\tilde{B} = [b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n], \text{ di mana}$$

$b_i \in [0,1], i = 1, 2, \ldots, n$; $\tilde{B}$ dikatakan suatu $1 \times n$ Matriks Baris *Fuzzy*.

Fuzzy matrix kolom adalah suatu *fuzzy matrix* yang hanya terdiri dari 1 kolom. *Fuzzy matrix* kolom dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan;

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \text{ di mana}$$

$c_j \in [0,1], j = 1, 2, \ldots, m$; $\tilde{B}$ dikatakan suatu $m \times 1$ *Fuzzy matrix* kolom.

Fuzzy matrix persegi adalah suatu *fuzzy matrix* yang terdiri dari baris dan kolom yang sama yaitu $n \times n$. *Fuzzy matrix* persegi dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan;

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ di mana}$$

$\mathrm{a_{ij}} \in [0,1], 1 \leq \mathrm{i}, \mathrm{j} \leq n$; $\tilde{\mathrm{A}}$ dikatakan suatu $n \times n$ *Fuzzy matrix* persegi.

Contoh *fuzzy matrix*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

c. Operasi *Fuzzy Matrix*

Operasi-operasi maksimal dan minimal, (Menurut [5], [11] [17] [20]) kita akan mendefinisikan 3 operasi pada *fuzzy matrix* berikut:

a. Maksimum dari matriks
b. Minimum dari suatu matriks dengan suatu skalar
c. Maksimal dan minimal dari suatu matriks

(a) Operasi Pertama: maksimum dari matriks-matriks

Jika dua *fuzzy matrix* berukuran sama maka mereka dikatakan sesuai untuk penjumlahan. Operasi max didefinisikan sebagai berikut;

Definisi : Penjumlahan *Fuzzy Matrix*

Misalkan ; $\tilde{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ dan $\tilde{B} = \left[b_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ merupakan dua *fuzzy matrix*

Maka penjumlahan dinotasikan $\tilde{A} + \tilde{B}$ didefinisikan sebagai

$$\tilde{A} + \tilde{B} = max\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$$

$$i.e., \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\,x\,n} = [max\,(a_{ij}\,, b_{ij})]_{m\,x\,n}\,; \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

Definisi : Pengurangan *Fuzzy Matrix*

Misalkan ; $\tilde{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ dan $\tilde{B} = \left[b_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ merupakan dua *fuzzy matrix*

Maka pengurangan dinotasikan $\tilde{A} - \tilde{B}$ didefinisikan sebagai

$\tilde{A} - \tilde{B} = max\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = \tilde{A} + \tilde{B}$

Contoh Penjumlahan *Fuzzy Matrix*

$$\text{Misal, } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} max(0.3,1) & max(0.1,0.2) & max(0.5,0.6) \\ max(0.1,0) & max(1,0.1) & max(0,0.3) \\ max(0,0.2) & max(0.4,0) & max(0.3,0.4) \\ max(0.8,0.2) & max(0,0.7) & max(0,0.2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(b) Operasi Kedua: minimum dari matriks dengan suatu skalar

Definisi : Perkalian *fuzzy matrix* dengan Skalar

Misalkan ; $\tilde{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ merupakan *fuzzy matrix* dan $k \in$ F, di mana F $= [0,1]$ adalah suatu interval unit *fuzzy*, maka perkalian skalar $\tilde{A}$ dengan k dinotasikan dengan $k\tilde{A}$ atau $\tilde{A}k$ dinyatakan dengan;

$$k\tilde{A} = \tilde{A}k = \left[ka_{ij}\right]_{m\,x\,n} = \left[min(k, a_{ij})\right]_{m\,x\,n}; a_{ij} \in [0,1], 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$$

Jadi $k\tilde{A}$ atau $\tilde{A}k$ adalah matriks yang terdiri dari setiap entri-entri dari $\tilde{A}$ dikalikan dengan k.

$$\text{Contoh } 0.5 \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} min(0.5,0.1) & min(0.5,1) & min(0.5,0) \\ min(0.5,0) & min(0.5,0.4) & min(0.5,0.3) \\ min(0.5,0.8) & min(0.5,0) & min(0.5,0) \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

$$= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Operasi Ketiga: *max min* dari matriks-matrik

Jika kita menginginkan untuk menemukan perkalian $\tilde{A}\tilde{B}$ dari dua matriks *fuzzy* $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ sesuai atas perkalian yaitu ukuran dari kolom-kolom $\tilde{A}$ = ukuran baris-baris $\tilde{B}$. Operasi max min pada perkalian *fuzzy matrix* didefinisikan sebagai berikut;

Misalkan ; $\tilde{A} = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ dan $\tilde{B} = [b_{ij}]_{n\,x\,p}$ merupakan dua *fuzzy matrix*

Maka perkalian dinotasikan $\tilde{A}\tilde{B}$ didefinisikan menjadi *fuzzy matrix* $[c_{ij}]_{m\,x\,p}$, di mana $c_{ik} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}b_{jk} = max\{min(a_{ij}, b_{jk})\,;\, 1 \le i \le m, 1 \le k \le p\}$ untuk $j = 1, 2, \dots, n$.

Catatan :

Jika perkalian *fuzzy matrix* $\tilde{A}\tilde{B}$ terdefinisi, maka $\tilde{B}\tilde{A}$ belum tentu terdefinisi.

Contoh $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$ dan $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} C_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}_{2x4}$$

Ketika $C_{11} = max\{min(0.1,1), min(1,0), min(0,0.2)\}$

$= max\{0.1, 0, 0\}$

$= 0.1$

$C_{12} = max\{min(0.1,0), min(1,0.3), min(0,0)\}$

$= max\{0, 0.3, 0\}$

$= 0.3$

$C_{13} = max\{min(0.1,0.2), min(1,0.1), min(0,0.7)\}$

$= max\{0.1, 0.1, 0\}$

$= 0.1$

$C_{14} = max\{min(0.1,0.6), min(1,0.3), min(0,0.2)\}$

$= max\{0.1, 0.3, 0\}$

$= 0.3$

$C_{21} = max\{min(0,1), min(0.4,0), min(0.3,0.2)\}$

$= max\{0, 0, 0.2\}$

$= 0.2$

$$C_{22} = max\{min(0,0), min(0.4,0.3), min(0.3,0)\}$$
$$= max\{0, 0.3, 0\}$$
$$= 0.3$$

$$C_{23} = max\{min(0,0.2), min(0.4,0.1), min(0.3,0.7)\}$$
$$= max\{0, 0.1, 0.3\}$$
$$= 0.3$$

$$C_{24} = max\{min(0,0.6), min(0.4,0.3), min(0.3,0.2)\}$$
$$= max\{0, 0.3, 0.2\}$$
$$= 0.3$$

Jadi $\tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$

d. Sifat-sifat Operasi *Fuzzy Matrix*

Dalam pembahasan ini akan dibuktikan bahwa sifat-sifat operasi matriks real berlaku pada *fuzzy matrix*. Berikut sifat-sifat operasi matriks real yang dibuat menjadi *fuzzy matrix* dan akan dibuktikan apakah sifat-sifat berikut berlaku pada *fuzzy matrix*.

1. Sifat-sifat Aritmatika *Fuzzy Matrix*

(a) $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$ (Hukum kumutatif penjumlahan)
(b) $\tilde{A} + (\tilde{B} + \tilde{C}) = (\tilde{A} + \tilde{B}) + \tilde{C}$ (Hukum asusiatif penjumlahan)
(c) $\tilde{A}(\tilde{B}\tilde{C}) = (\tilde{A}\tilde{B})\tilde{C}$ (Hukum asusiatif perkalian)
(d) $\tilde{A}(\tilde{B} + \tilde{C}) = \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{C}$ (Hukum distributive kiri)
(e) $(\tilde{B} + \tilde{C})\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{A} + \tilde{C}\tilde{A}$ (Hukum distributive kanan)
(f) $\tilde{A}(\tilde{B} - \tilde{C}) = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{A}\tilde{C}$
(g) $(\tilde{B} - \tilde{C})\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{A} - \tilde{C}\tilde{A}$
(h) $\tilde{k}(\tilde{B} + \tilde{C}) = \tilde{k}\tilde{B} + \tilde{k}\tilde{C}$
(i) $k(\tilde{B} - \tilde{C}) = \tilde{k}\tilde{B} - \tilde{k}\tilde{C}$
(j) $(\tilde{k} + \tilde{l})\tilde{C} = \tilde{k}\tilde{C} + \tilde{l}\tilde{C}$
(k) $(\tilde{k} - \tilde{l})\tilde{C} = \tilde{k}\tilde{C} - \tilde{l}\tilde{C}$
(l) $\tilde{k}(\tilde{l}\tilde{C}) = (\tilde{k}\tilde{l})\tilde{C}$
(m) $\tilde{k}(\tilde{B}\tilde{C}) = (\tilde{k}\tilde{B})\tilde{C} = \tilde{B}(\tilde{k}\tilde{C})$

2. Sifat-sifat Transpos *Fuzzy Matrix*

a. $\left((\tilde{A})^T\right)^T = \tilde{A}$
b. $(\tilde{A} + \tilde{B})^T = \tilde{A}^T + \tilde{B}^T$ dan $(\tilde{A} - \tilde{B})^T = \tilde{A}^T - \tilde{B}^T$
c. $(\tilde{k}\tilde{A})^T = \tilde{k}\tilde{A}^T$, dengan k adalah skalar sebarang
d. $(\tilde{A}\tilde{B})^T = \tilde{B}^T\tilde{A}^T$

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

Pembuktian Sifat-sifat Aritmatika *Fuzzy Matrix*

1. Akan dibuktikan bahwa $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{B}+\tilde{A}$
   Missal, $\tilde{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},\left\{a_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$
   $\tilde{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n},\left\{b_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$

   i. $\tilde{A}+\tilde{B}=max(a_{ij},b_{ij})$
   ii. $\tilde{B}+\tilde{A}=max(b_{ij},a_{ij})$
   Karena $max(y,\quad x)=max(x,\quad y)$, maka
   $\tilde{B}+\tilde{A}=max(a_{ij},b_{ij})$
   Dari i dan ii didapatkan $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{B}+\tilde{A}$, sehingga sifat operasi *fuzzy matrix* (a) $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{B}+\tilde{A}$ terbukti.
2. Akan dibuktikan bahwa $\tilde{A}+\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)=(\tilde{A}+\tilde{B})+\tilde{C}$

   Missal, $\tilde{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},\left\{a_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$
   $\tilde{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n},\left\{b_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$
   $\tilde{C}=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},\left\{c_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$

   i. $\tilde{A}+\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)=max\left(a_{ij}max(b_{jk},c_{kl})\right)$
   Karena $max\big(x,max(y,z)\big)=max(x,y,z)$, maka
   $\tilde{A}+\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)=max\left(a_{ij},b_{jk},c_{kl}\right)$
   ii. $\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)+\tilde{C}=max\left(max(a_{ij},b_{jk},c_{kl})\right)$
   Karena $max\big(\ max(x,y,z)\big)=max(x,y,z)$, maka
   $\tilde{A}+\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)=max\left(a_{ij},b_{jk},c_{kl}\right)$
   Dari i dan ii didapatkan $\tilde{A}+\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)=(\tilde{A}+\tilde{B})+\tilde{C}$, sehingga sifat operasi *fuzzy matrix* (b) $\tilde{A}+\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)=(\tilde{A}+\tilde{B})+\tilde{C}$ terbukti.
3. Akan dibuktikan bahwa $\left(\tilde{B}+\tilde{C}\ \right)\tilde{A}=\ \tilde{B}\tilde{A}+\tilde{C}\tilde{A}$
   Missal, $\tilde{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},\left\{a_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$
   $\tilde{B}=\left[b_{ij}\right]_{m\times n},\left\{b_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$
   $\tilde{C}=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},\left\{c_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\right\}$

   i. $\left(\tilde{B}+\tilde{C}\ \right)\tilde{A}=max\left[min\left(max\left(\tilde{B},\tilde{C}\right),\tilde{A}\right)\right]$ *dari 4.a diperoleh*
   $=max\left[max\left[min\left(\tilde{A},\tilde{B}\right),min\left(\tilde{A},\tilde{C}\right)\right]\right]$ *dari 3.b diperoleh*
   $=max\left[min\left(\tilde{A},\tilde{B}\right),min\left(\tilde{A},\tilde{C}\right)\right]$ *dari 2.a diperoleh*
   $=max\left[min\left(\tilde{B},\tilde{A}\right),min\left(\tilde{C},\tilde{A}\right)\right]$
   ii. $\tilde{B}\tilde{A}+\tilde{C}\ \tilde{A}=max\left[max\left[min\left(\tilde{B},\tilde{A}\right)\right],max\left[min\left(\tilde{C},\tilde{A}\right)\right]\right]$ *dari 3.b diperoleh*
   $=max\left[min\left(\tilde{B},\tilde{A}\right),min\left(\tilde{C},\tilde{A}\right)\right]$
   Dari i dan ii didapatkan $\left(\tilde{B}+\tilde{C}\ \right)\tilde{A}=\ \tilde{B}\tilde{A}+\tilde{C}\tilde{A}$, sehingga sifat operasi *fuzzy matrix* (e) $\left(\tilde{B}+\tilde{C}\ \right)\tilde{A}=\ \tilde{B}\tilde{A}+\tilde{C}\tilde{A}$ terbukti.

Dari definisi operasi $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{A}-\tilde{B}=max\{\tilde{A},\tilde{B}\}$, didapatkan sifat operasi aritmatika *fuzzy matrix* (e) $(\tilde{B}+\tilde{C})\tilde{A}=\tilde{B}\tilde{A}+\tilde{C}\tilde{A}$ ekivalen dengan (g) $(\tilde{B}-\tilde{C})\tilde{A}=\tilde{B}\tilde{A}-\tilde{C}\tilde{A}$, dengan demikian sifat operasi aritmatika *fuzzy matrix* (g) $(\tilde{B}-\tilde{C})\tilde{A}=\tilde{B}\tilde{A}-\tilde{C}\tilde{A}$ terbukti.

4. Akan dibuktikan $\tilde{A}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{A}\tilde{B}+\tilde{A}\tilde{C}$

   i. $\tilde{A}(\tilde{B}+\tilde{C})=max\left[min\left(\tilde{A},max(\tilde{B},\tilde{C})\right)\right]$ *dari 4.a diperoleh*

   $=max\left[max\left[min(\tilde{A},\tilde{B}),min(\tilde{A},\tilde{C})\right]\right]$ *dari 3.b diperoleh*

   $=max\left[min(\tilde{A},\tilde{B}),min(\tilde{A},\tilde{C})\right]$

   ii. $\tilde{A}\tilde{B}+\tilde{A}\tilde{C}=max\left[max\left[min(\tilde{A},\tilde{B})\right],max\left[min(\tilde{A},\tilde{C})\right]\right]$ *dari 3.b diperoleh*

   $=max\left[min(\tilde{A},\tilde{B}),min(\tilde{A},\tilde{C})\right]$

   Dari i dan ii didapatkan $\tilde{A}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{A}\tilde{B}+\tilde{A}\tilde{C}$, sehingga sifat operasi *fuzzy matrix* (d) $\tilde{A}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{A}\tilde{B}+\tilde{A}\tilde{C}$ terbukti.

   Dari definisi operasi $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{A}-\tilde{B}=max\{\tilde{A},\tilde{B}\}$, didapatkan sifat operasi aritmatika *fuzzy matrix* (d) $\tilde{A}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{A}\tilde{B}+\tilde{A}\tilde{C}$ ekivalen dengan (f) $\tilde{A}(\tilde{B}-\tilde{C})=\tilde{A}\tilde{B}-\tilde{A}\tilde{C}$, dengan demikian sifat operasi aritmatika *fuzzy matrix* (f) $\tilde{A}(\tilde{B}-\tilde{C})=\tilde{A}\tilde{B}-\tilde{A}\tilde{C}$ terbukti.

5. Akan dibuktikan $\tilde{k}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{k}\tilde{B}+\tilde{k}\tilde{C}$

   i. $\tilde{k}(\tilde{B}+\tilde{C})=min\left(\tilde{k},max(\tilde{B},\tilde{C})\right)$

   $=max\left[min(\tilde{k},\tilde{B}),min(\tilde{k},\tilde{C})\right]$

   ii. $\tilde{k}\tilde{B}+\tilde{k}\tilde{C}=max\left[min(\tilde{k},\tilde{B}),min(\tilde{k},\tilde{C})\right]$

   Dari i dan ii didapatkan $\tilde{k}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{k}\tilde{B}+\tilde{k}\tilde{C}$, sehingga sifat operasi *fuzzy matrix* (h) $\tilde{k}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{k}\tilde{B}+\tilde{k}\tilde{C}$ terbukti.

   Dari definisi operasi $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{A}-\tilde{B}=max\{\tilde{A},\tilde{B}\}$, didapatkan sifat operasi aritmatika *fuzzy matrix* (h) $\tilde{k}(\tilde{B}+\tilde{C})=\tilde{k}\tilde{B}+\tilde{k}\tilde{C}$ ekivalen dengan (i) $k(\tilde{B}-\tilde{C})=\tilde{k}\tilde{B}-\tilde{k}\tilde{C}$, dengan demikian sifat operasi aritmatika *fuzzy matrix* (i) $k(\tilde{B}-\tilde{C})=\tilde{k}\tilde{B}-\tilde{k}\tilde{C}$ terbukti.

Pembuktian Sifat-sifat Operasi Transpos *Fuzzy Matrix*

1. Akan dibuktikan bahwa $\left((\tilde{A})^T\right)^T=\tilde{A}$

   Bukti.

   Misalkan suatu *fuzzy matrix* $\tilde{A}=[a_{ij}]_{m\times n},\{a_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\}$

   $$\left((\tilde{A})^T\right)^T=\left((a_{ij})^T\right)^T=(a_{ji})^T=a_{ij}=\tilde{A}$$

   Sehingga terbukti bahwa untuk *fuzzy matrix* $\tilde{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ berlaku $\left((\tilde{A})^T\right)^T=\tilde{A}$.

   Sebagai contoh adalah :

   Missal, $\tilde{A}=[a_{ij}]_{m\times n},\{a_{ij}\in[0,1],1\le i\le m,1\le j\le n\}$

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka

$$(\tilde{A})^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\left((\tilde{A})^T\right)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dari uraian di atas dapat dibuktikan bahwa sifat transpose yang pertama (a)$\left((\tilde{A})^T\right)^T$ terbukti.

2. Akan dibuktikan bahwa $(\tilde{A} + \tilde{B})^T = \tilde{A}^T + \tilde{B}^T$
   Bukti.
   Misalkan suatu *fuzzy matrix*
   $\tilde{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \{a_{ij} \in [0,1], 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ dan
   $\tilde{B} = [b_{ij}]_{m\times n}, \{b_{jk} \in [0,1], 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$ sehingga,
   $(\tilde{A} + \tilde{B})^T = \left((a_{ij}) + (b_{ij})\right)^T = \left(max(a_{ij}, b_{ij})\right)^T = max(a_{ji}, b_{ji})$ sedangkan,
   $\tilde{A}^T + \tilde{B}^T = (a_{ij})^T + (b_{ij})^T = a_{ji} + b_{ji} = max(a_{ji}, b_{ji})$, sehingga
   $(\tilde{A} + \tilde{B})^T = \tilde{A}^T + \tilde{B}^T$
   Sehingga terbukti bahwa untuk *fuzzy matrix* $\tilde{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $\tilde{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$berlaku$(\tilde{A} + \tilde{B})^T = \tilde{A}^T + \tilde{B}^T$.
   ii) Akan dibuktikan bahwa $(A - B)^T = A^T - B^T$
   Bukti
   Misalkan suatu *fuzzy matrix*
   $\tilde{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \{a_{ij} \in [0,1], 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ dan
   $\tilde{B} = [b_{ij}]_{m\times n}, \{b_{jk} \in [0,1], 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$ sehingga,
   $(\tilde{A} - \tilde{B})^T = \left((a_{ij}) - (b_{ij})\right)^T$. Karena $\tilde{A} + \tilde{B} = max(a_{ij}, b_{ij}) = \tilde{A} - \tilde{B}$, maka
   $(\tilde{A} - \tilde{B})^T = \left((a_{ij}) + (b_{ij})\right)^T = \left(max(a_{ij}, b_{ij})\right)^T = max(a_{ji}, b_{ji})$.
   Karena $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{A} - \tilde{B}$, maka
   $$\begin{aligned} \tilde{A}^T - \tilde{B}^T = \tilde{A}^T + \tilde{B}^T &= (a_{ij})^T + (b_{ij})^T \\ &= (a_{ij})^T + (b_{ij})^T \\ &= a_{ji} + b_{ji} \\ &= max(a_{ji}, b_{ji}) \end{aligned}$$
   Sehingga terbukti bahwa untuk *fuzzy matrix* $\tilde{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $\tilde{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$berlaku $(A - B)^T = A^T - B^T$.

Sebagai contoh adalah

Missal, $\tilde{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \{a_{ij} \in [0,1], 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$

$\tilde{B} = [b_{jk}]_{n\times p}, \{b_{jk} \in [0,1], 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq p\}$

$\tilde{C} = [c_{kl}]_{p\times q}, \{c_{kl} \in [0,1], 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q\}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

i. $(A + B)^T =$

$$(A+B) = \begin{bmatrix} max(a_{11}, b_{11}) & max(a_{12}, b_{12}) & \dots & max(a_{1n}, b_{1p}) \\ max(a_{21}, b_{21}) & max(a_{22}, b_{22}) & \dots & max(a_{2n}, b_{2p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ max(a_{m1,b_{n1}}) & max(a_{m2}, b_{n2}) & \dots & max(a_{mn}, b_{np}) \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} max(a_{11}, b_{11}) & max(a_{21}, b_{21}) & \dots & max(a_{m1,b_{n1}}) \\ max(a_{12}, b_{12}) & max(a_{22}, b_{22}) & \dots & max(a_{m2}, b_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ max(a_{1n}, b_{1p}) & max(a_{2n}, b_{2p}) & \dots & max(a_{mn}, b_{np}) \end{bmatrix}$$

ii. $A^T + B^T =$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1p} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} max(a_{11}, b_{11}) & max(a_{21}, b_{21}) & \dots & max(a_{m1,b_{n1}}) \\ max(a_{12}, b_{12}) & max(a_{22}, b_{22}) & \dots & max(a_{m2}, b_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ max(a_{1n}, b_{1p}) & max(a_{2n}, b_{2p}) & \dots & max(a_{mn}, b_{np}) \end{bmatrix}$$

Dari i dan ii didapatkan bahwa sifat orerasi transpose (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ terbukti.

Untuk sifat operasi transpose $(A - B)^T = A^T - B^T$ sama, karena pada opesi penjumlahan dan pengurangan matriks *fuzzy* hasilnya sama.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa sifat operasi transpos matriks *fuzzy* $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$ terbukti

Dari sifat transpos *fuzzy matrix* dapat dibuktikan bahwa (a) $\left((\tilde{A})^T\right)^T = \tilde{A}$, (b)$(\tilde{A} + \tilde{B})^T = \tilde{A}^T + \tilde{B}^T$ dan $(\tilde{A} - \tilde{B})^T = \tilde{A}^T - \tilde{B}^T$ terbukti.

III. KESIMPULAN

Dari hasil kajian sifat-sifat operasi matriks dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat operasi aritmatika matriks dan operasi tranpos matrik berlaku pada sifat-sifat operasi

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

fuzzy matrix. Hanya saja dalam makalah ini pembuktian sifat-sifat operasi *fuzzy matrix* tidak disajikan secara keseluruhan.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard and Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta : Erlangga.
[2] Chen, Guanrong. 2001.*Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*. University of Houston Houston. *USA:* CRC Press.
[3] Ibrahim, Ahmad M. 2004. *Fuzzy Logic: for Embedded Systems Applications*. *USA* : Elsevier Science.
[4] Kalra, Nidhi. 2010. *Study Of Fuzzy, Super and Super Fuzzy Matrix Theory*. Thesis diterbitkan. Punjab: Thapar University.
[5] Kandasamy W.B.V., Smarandache F. and Amal K., 2008. "*Super Fuzzy Matrices and Super Fuzzy Models for Social Scientists*", Ann Arbor (2008).
[6] Kandasamy, Vasantha. 2008. *Super Fuzzy Matrices And Super Fuzzy Models For Social Scientists*. United States of America: Info Learn Quest.
[7] Klir G.J., and Yuan B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. *USA* : Prentice-Hall.
[8] Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.
[9] Leondes, Cornelius T. 1998. *Fuzzy Logic and Expert Systems Applications*. USA: Academic Press.
[10] Oscar C. and Patricia M. 2008. *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Verlag Berlin: Springer.
[11] Purnomo, H., Kusumadewi, S. 2004. Aplikasi Logika Fuzzy. Yogyakarta: Graha Ilmu
[12] Serre, Denis. 2002 . *Matrices ; Theory and Applications*. Verlag New York: Springer.
[13] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
[14] Thayer, W., Silicon, V.& Tornado, A.. *Fuzzy Logic: The Logic of Fuzzy Sets*. www.applet-magic.com , diakses 16 Februari 2014
[15] Thomas S., Shores. 2000. *Applied linear algebra And matrix analysis*. *USA:* May 2000 All Rights Reserved.
[16] Timothy, J. Ross. 2010. *Fuzzy logic with Engineering applications*. A John Wiley and Sons, Ltd. *USA:* Publication. *University of New Mexico.*
[17] Vasantha Kandasamy, W.B., and Indra, V. 2000. *Applications of Fuzzy Cognitive Maps to Determine the Maximum Utility of a Route, J. of Fuzzy Maths, publ*. by the Int. fuzzy Mat. Inst., 8 (2000) 65-77.
[18] Vasantha, Kandasamy, W.B. 2008. *Set linear algebra And set fuzzy linear algebra*. *USA:* Ann Arbor.
[19] Vasantha, Kandasamy. 2007. *Elementary Fuzzy Matrix Theory and Fuzzy Models for Social Scientists*. *USA:* Automaton.
[20] Zadeh, L.A. 1971. *Similarity Relations and Fuzzy Orderings, Inform. Sci.*, 3 (1971) 177-200
[21] Zadeh, L.A., 1965. *Fuzzy Sets, Inform. and control*, 8, 338-353.