ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

SEMI HASIL KALI DALAM PADA SUATU NORMA DI RUANG VEKTOR KOMPLEKS

Isa Nofaria[1], Mu'jizatin Fadiana[2], Edy Nurfalah[3]

[1]*Mahasiswa Matematika, Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW) Tuban*
isa.novaria@gmail.com
[2]*Dosen Matematika, Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW) Tuban*
mujizatin000@gmail.com
[3]*Dosen Pendidikan Matematika, Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW) Tuban*
masedy@ymail.com

Abstrak

Paper ini bertujuan untuk mendiskripsikan aksioma yang menjadi perbedaan antara hasil kali dalam dengan semi hasil kali dalam, serta menjelaskan seminorma dan membuktikan kebenaran teorema-teorema yang berlaku pada semi hasil kali dalam dan seminorma pada ruang vektor kompleks.
Nilai seminorma selalu positif atau sama dengan nol. Jika suatu vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V yang dihubungkan dengan perkalian titik $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ adalah semi hasil kali dalam, maka vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V tersebut belum tentu memenuhi aksioma hasil kali dalam. Sedangkan jika suatu vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V yang dihubungkan dengan perkalian titik $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ adalah hasil kali dalam, maka vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V tersebut memenuhi aksioma semi hasil kali dalam.

Kata kunci: *Hasil Kali Dalam, Seminorma, Semi Hasil Kali Dalam, Vektor Kompleks*

I. PENDAHULUAN

Hasil kali dalam pada ruang vektor kompleks V adalah fungsi yang mengasosiasikan sebuah bilangan $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada V yang memenuhi aksioma-aksioma hasil kali dalam [2]. Adapun aksioma-aksioma hasil kali dalam antara lain: aksioma kehomogenan, aksioma penjumlahan, aksioma definit positif dan aksioma simetris konjugat. V disebut ruang vektor kompleks, jika semua vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ pada V dan semua skalar k dan l memenuhi 10 aksioma berikut: (1) Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor pada V, maka $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ berada di V (2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (3) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (4) ada sebuah vektor 0 di V sedemikian hingga $0+\mathbf{u}=\mathbf{u}+0$ untuk semua $\mathbf{u}$ di V (5) untuk semua $\mathbf{u}$ di V ada sebuah vektor $-\mathbf{u}$ di V yang disebut sebagai negatif $\mathbf{u}$ sedemikian hingga $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=-\mathbf{u}+\mathbf{u}=0$ (6) jika k sebarang skalar kompleks dan $\mathbf{u}$ sebarang vektor di V, maka $k\mathbf{u}$ berada di V (7) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$ (8) $(k+l)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$ (9) $k(l\mathbf{u})=(kl)(\mathbf{u})$ (10) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Sebuah ruang vektor kompleks dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam kompleks [2]. Seperti halnya pada pembahasan ilmu aljabar yang lainnya, suatu ruang vektor mempunyai sub ruang vektor dan suatu ring juga mempunyai sub ring. Dari kajian di atas, penulis ingin mengkaji lebih dalam tentang sub hasil kali dalam yang selanjutnya disebut semi hasil kali dalam. Dan pada penelitian sebelumnya telah dikaji tentang kajian semi hasil kali dalam pada suatu norma di ruang vektor real, sehingga hal inilah yang menjadi pendorong bagi penulis untuk mengkaji tentang *Semi Hasil Kali Dalam pada Suatu Norma di Ruang Vektor Kompleks*.

II. SEMI HASIL KALI DALAM PADA SUATU NORMA DI RUANG VEKTOR KOMPLEKS

Pada bab ini kita mulai dengan semi hasil kali dalam kompleks, karena hasil kali dalam kompleks sudah dibahas pada bab sebelumnya.

2.1 Semi Hasil Kali Dalam Kompleks

Definisi 2.1.1

Pemetaan $[.,.]: V\ x\ V \to \mathbb{F}$ disebut semi hasil kali dalam, jika aksioma-aksioma berikut terpenuhi:

1) $[k\mathbf{u},\mathbf{v}] = k[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ (aksioma kehomogenan variabel pertama)
2) $[\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}] = [\mathbf{u},\mathbf{w}] + [\mathbf{v},\mathbf{w}]$ (aksioma penjumlahan)
3) $[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geq 0$ untuk semua $\mathbf{u} \in V$ dan $[\mathbf{u},\mathbf{u}] = 0$ berarti bahwa $\mathbf{u} = 0$ (aksioma definit positif)
4) $[\mathbf{u},k\mathbf{v}] = \bar{k}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ (aksioma kehomogenan variabel kedua)
5) $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$

Contoh 2.1.2

Anggap $\mathbf{u} = u_1, u_2, \ldots, u_n$ dan $\mathbf{v} = v_1, v_2, \ldots, v_n$. Apabila semi hasil kali dalam kompleks di definisikan $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$. Tunjukkanlah apakah memenuhi aksioma semi hasil kali dalam kompleks.

Ambil sebarang $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbf{u}$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbf{v}$ dan $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbf{w}$ sedemikian hingga $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbf{C}^n$

1) $[k\mathbf{u},\mathbf{v}] = k[\mathbf{u},\mathbf{v}]$
$$ku_1\overline{v_1} + ku_2\overline{v_2} + \cdots + ku_n\overline{v_n} = k(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n})$$
$$k(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}) = k(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n})$$

2) $$\begin{aligned}[\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}] &= (u_1+v_1,\overline{w_1}) + (u_2+v_2,\overline{w_2}) + \cdots + (u_n+v_n,\overline{w_n}) \\ &= (u_1+v_1,\overline{w_1}) + (u_2+v_2,\overline{w_2}) + \cdots + (u_n+v_n,\overline{w_n}) \\ &= u_1\overline{\overline{w_1}} + v_1\overline{\overline{w_1}} + u_2\overline{\overline{w_2}} + v_2\overline{\overline{w_2}} + \cdots + u_n\overline{\overline{w_n}} + v_n\overline{\overline{w_n}} \\ &= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + \cdots + u_nw_n + v_nw_n \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n) + (v_1w_1 + +v_2w_2 + \cdots + +v_nw_n) \\ &= [\mathbf{u},\mathbf{w}] + [\mathbf{v},\mathbf{w}]\end{aligned}$$

3) $[\mathbf{u},\mathbf{u}] = u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n} = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2 \geq 0$
Lebih jauh lagi, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $|u_1| = |u_2| = \cdots = |u_n| = 0$. Namun hal ini benar jika $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$, yaitu jika dan hanya jika $\mathbf{u} = 0$

4) $[\mathbf{u}, k\mathbf{v}] = \bar{k}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$
$u_1\overline{kv_1} + u_2\overline{kv_2} + \cdots + u_n\overline{kv_n} = \bar{k}(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n})$
$\bar{k}(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}) = \bar{k}(u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n})$

5) $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}]$
Jika $k \in V$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka
$0 \leq [\mathbf{u} + k\mathbf{v}, \mathbf{u} + k\mathbf{v}]$
$= [\mathbf{u}, \mathbf{u}] + k[\mathbf{v}, \mathbf{u}] + \bar{k}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] + |k|^2[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$
Missal $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = be^i, b \geq 0$ dan $k = e^{-i}t,\ t$ adalah sebarang bilangan real.
$0 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}] + e^{-i}tbe^i + e^itbe^{-i} + t^2[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$
$= [\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2bt + t^2[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$
$= \mathrm{c} + 2bt + at^2 \equiv q(t)$
Dimana $c = [\mathbf{u}, \mathbf{u}]$ dan $a = [\mathbf{v}, \mathbf{v}]$**.** Demikian $q(t)$ adalah polinom kuadratik di t variable real dan $q(t) \geq 0$ untuk semua t. Ini berarti bahwa persamaan $q(t) = 0$ memiliki paling banyak satu t solusi real. Dengan demikian diskriminannya pasti memenuhi ketaksamaan $0 \geq 4b^2 - 4ac$. Sehingga
$0 \geq b^2 - ac = |[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|^2 - [\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}] \equiv |[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}]$

Contoh 2.1.3

Misalkan $\mathbf{u} = (2 + i, i)$ $\quad \mathbf{v} = (-i, 2i)$ $\quad \mathbf{w} = (i, 2)$ pada ruang vektor kompleks. Apabila semi hasil kali dalam kompleks didefinisikan $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = u_1\bar{v}_1 + u_2\overline{v_2}$. Tunjukkan apakah memenuhi aksioma semi hasil kali dalam kompleks.

1) $[k\mathbf{u}, \mathbf{v}] = k[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$
Misalkan $k = i$, maka

$$\begin{aligned}[k\mathbf{u}, \mathbf{v}] &= [i(2 + i, i), (-i, 2i)] \\ &= \left[\left(2i - 1, (-1)\right), (-i, 2i)\right] \\ &= (2i - 1)\overline{(-i)} + (-1)\overline{(2i)} \\ &= (2i - 1).i + (-1)(-2i) \\ &= (-2 - i) + 2i \\ &= -2 + i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k[\mathbf{u}, \mathbf{v}] &= i[(2 + i, i), (-i, 2i)] \\ &= i\left((2 + i)\overline{(-i)} + i\overline{(2i)}\right) \\ &= i((2 + i)(i) + i(-2i)) \\ &= i((2i - 1) + 2) \\ &= i(2i + 1) \\ &= -2 + i\end{aligned}$$

2) $[\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$

$$\begin{aligned}[\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}] &= \left[\left((2 + i, i) + (-i, 2i)\right), (i, 2)\right] \\ &= [(2, 3i), (i, 2)] \\ &= 2.\bar{\imath} + 3i.\bar{2} \\ &= 2.-i + 3i.2 \\ &= -2i + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}] &= [(2 + i, i), (i, 2i)] + [(-i, 2i), (i, 2i)] \\ &= \left((2 + i)\bar{\imath} + i.\overline{2\imath}\right) + (-i.\bar{\imath} + 2i.\overline{2\imath}) \\ &= \left((2 + i) - i + i.(-2i)\right) + \left(-i.-i + 2i.(-2i)\right) \\ &= (-2i + 1 + 2) + (-1 + 4)\end{aligned}$$

$= -2i + 3 + 3$
$= -2i + 6$

3) $[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geq 0$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u},\mathbf{u}] &= [(2+i,i),(2+i,i)] \\
&= (2+i)\overline{(2+i)} + i\overline{(i)} \\
&= (2+i)(2-i) + i(-i) \\
&= (4+1)+1 \\
&= 6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti $[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geq 0$

4) $[\mathbf{u},k\mathbf{v}] = \bar{k}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u},k\mathbf{v}] &= [(2+i,i),i(-i,2i)] \\
&= [(2+i,i),(1,-2)] \\
&= \left((2+i).\bar{1} + i.\overline{-2}\right) \\
&= \left((2+i).1 + i.-2\right) \\
&= (2+i-2i) \\
&= 2-i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{k}[\mathbf{u},\mathbf{v}] &= \bar{\imath}[(2+i,i),(-i,2i)] \\
&= -i\left((2+i)(\overline{-\imath}) + i.\overline{2\imath}\right) \\
&= -i\left((2+i)i + i.-2i\right) \\
&= -i(2i-1+2) \\
&= -i(2i+1) \\
&= 2-i
\end{aligned}
$$

5) $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$

$$
\begin{aligned}
|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 &= |[(2+i,i),(-i,2i)]|^2 \\
&= |(2+i)\overline{-\imath} + i.\overline{2\imath}|^2 \\
&= |(2+i)i + i.-2i|^2 \\
&= |(2i-1)+2|^2 \\
&= |2i+1|^2 \\
&= 2^2+1^2 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}] &= [(2+i,i),(2+i,i)][(-i,2i),(-i,2i)] \\
&= \left((2+i)(\overline{2+\imath}) + i.\bar{\imath}\right)(-i.\overline{-\imath} + 2i.\overline{2\imath}) \\
&= \left((2+i)(2-i) + i.-i\right)(-i.i + 2i.-2i) \\
&= (4+1+1)(1+4) \\
&= 6.5 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

Karena $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 = 5 < 30 = [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$ jadi terbukti $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$

Jadi $\mathbf{u} = (2+i,i), \mathbf{v} = (-i,2i), \mathbf{w} = (i,2)$ pada ruang vektor kompleks V memenuhi aksioma semi hasil kali dalam kompleks dan $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ merupakan semi hasil kali dalam kompleks.

2.2 Norma Pada Semi Hasil Kali Dalam Kompleks

Definisi 2.2.1

Misalkan V suatu ruang vektor atas $\mathbb{F}$.

Suatu fungsi $\|\cdot\|: V \to R$ disebut norma vektor jika untuk semua $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ berlaku:

(1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$

(1a) $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = 0$
(2) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$ untuk semua $k \in F$
(3) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
Suatu fungsi yang memenuhi (1), (2) dan (3) tanpa memenuhi (1a) disebut seminorma. Dalam hal ini kita dapat memandang seminorma sebagai perumunan dari norma.

Berdasarkan definisi 2.1.1 terdapat gagasan penting yang menunjukkan bahwa Semi Hasil Kali Dalam $[\cdot,\cdot]$ pada ruang linier V selalu menginduksi norma pada V dengan menetapkan $\|\mathbf{u}\| = [\mathbf{u},\mathbf{u}]^{1/2}$.

Contoh 2.2.2

Jika $\mathbf{u} = u_1, u_2, \dots, u_n$ adalah vektor-vektor dalam C^n dengan semi hasil kali dalam, maka:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| = [\mathbf{u},\mathbf{u}]^{1/2} &= \sqrt{[(u_1, u_2, \dots, u_n), (u_1, u_2, \dots, u_n)]} \\ &= \sqrt{u_1.\overline{u_1} + u_2.\overline{u_2} + \dots + u_n.\overline{u_n}} \\ &= \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2}\end{aligned}$$

2.3 Hubungan Semi Hasil Kali Dalam Kompleks dengan Hasil Kali Dalam Kompleks

Menurut definisi semi hasil kali dalam kompleks dan definisi hasil kali dalam kompleks terdapat beberapa perbedaan aksioma, yaitu:

Semi Hasil Kali Dalam Kompleks	Hasil Kali Dalam Kompleks
1. $[k\mathbf{u},\mathbf{v}] = k[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ 2. $[\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}] = [\mathbf{u},\mathbf{w}] + [\mathbf{v},\mathbf{w}]$ 3. $[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geq 0$ dan $[\mathbf{u},\mathbf{u}] = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 4. $[\mathbf{u},k\mathbf{v}] = \bar{k}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ 5. $\|[\mathbf{u},\mathbf{v}]\|^2 \leq [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$	1. $\langle k\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = k\,\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ 2. $\langle\mathbf{u}+\mathbf{v},w\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ 3. $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geq 0$ dan $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = 0$ 4. $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}$

Dari tabel di atas dapat diuraikan perbedaan antara semi hasil kali dalam kompleks dan hasil kali dalam kompleks adalah sebagai berikut:

1. Aksioma $[\mathbf{u},k\mathbf{v}] = \bar{k}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$
   Pada semi hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut merupakan salah satu syarat jika ingin terdefinisi sebagai semi hasil kali dalam kompleks. Sedangkan pada hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut hanya merupakan sifat tambahan yang diturunkan secara langsung dari keempat aksioma hasil kali dalam kompleks.
2. Aksioma $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$
   Pada semi hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut merupakan salah satu syarat jika ingin terdefinisi sebagai semi hasil kali dalam kompleks. Sedangkan pada hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut merupakan penjabaran daripada teorema Ketaksamaan Cauchy-Schwarz.
3. $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}$

Pada semi hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut tidak dipenuhi. Sedangkan pada hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut merupakan salah satu syarat jika ingin terdefinisi sebagai hasil kali dalam kompleks.

4. Aksioma $[\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] + [\mathbf{u}, \mathbf{w}]$
   Pada semi hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut tidak dipenuhi. Sedangkan pada hasil kali dalam kompleks aksioma tersebut merupakan sifat tambahan yang diturunkan secara langsung dari keempat aksioma hasil kali dalam kompleks.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Jika suatu vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V yang dihubungkan dengan perkalian titik $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ adalah semi hasil kali dalam, maka vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V tersebut belum tentu memenuhi aksioma hasil kali dalam. Sedangkan Jika suatu vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V yang dihubungkan dengan perkalian titik $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ adalah hasil kali dalam, maka vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang vektor kompleks V tersebut juga memenuhi aksioma semi hasil kali dalam.
2. Norma pada semi hasil kali dalam disebut seminorma dan lambangnya sama dengan norma, yaitu $\|\mathbf{u}\|$. Nilai seminorma selalu positif atau sama dengan nol, karena pada semi hasil kali dalam berlaku $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq 0$ dan $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = 0$ (aksioma definit positif).

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Alimin, Shodiq. 2009. *Kajian Semi Hasil Kali Dalam pada Suatu Norma*. Skripsi diterbitkan. Malang: UIN Malang.

[2] Anton, Howard, dkk. 2005. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan – jilid 2.* Jakarta: Erlangga.

[3] Anton, Howard, dkk. 2005. *Elementary Linear Algebra with Application Ninth Edition.* USA: Bind-Rite Graphics, Inc.

[4] Conwoy, John B., 1990. *A Course In Functional Analysis Second Edition. New York: Springer-Verlag.*

[5] Dragomir. S. 2004. *Semi-Inner Product and Application*. New York: Hauppauge.