DEKOMPOSISI SCHUR PADA MATRIKS – MATRIKS HERMITE

Khusnul Khotimah[1], Didik Khusnul Arif[2], Rusmadji[3]
[1]*Mahasiswa Matematika, FMIPA UNIROW Tuban*
Khusnul.Khotimah836@yahoo.com
[2]*Dosen Matematika, FMIPA ITS Surabaya*
didik@matematika.its.ac.id
[3]*Dosen Pendidikan Matematika, FMIPA UNIROW Tuban*
Roesma2000@gmail.com

Abstrak

Artikel ini membahas prosedur dekomposisi schur pada matriks-matriks hermite. Dekomposisi schur adalah proses diagonalisasi suatu matriks persegi sebagai perkalian matriks uniter dengan matriks segitiga atas. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut: $A = U\,T\,U^*$, dengan A adalah hasil dari proses dekomposisi schur, U adalah matriks uniter, T adalah matriks segitiga atas dan U^*adalah matriks uniter yang sudah ditranspos dan dikonjugat, sedangkan matriks hermite adalah matriks bujur sangkar A dengan unsur kompleks, jika $A = A^*$, dengan $A^* = \bar{A}^t$. Adapun langkah-langkah metode dekomposisi schur merupakan iterasi yang akan berhenti jika matriks K_k menghasilkan matriks segitiga atas atau bisa disebut juga matriks diagonal, dengan K_k merupakan matriks hasil iterasi sementara.

Kata Kunci: *Dekomposisi Schur, Matriks Hermite.*

I. PENDAHULUAN

Matriks bujur sangkar A dengan unsur kompleks disebut *Hermite* jika $A = A^*$,dengan$A^* = \bar{A}^t$ [2]. Dekomposisi schur adalah proses diagonalisasi suatu matriks persegi sebagai perkalian matriks uniter dengan matriks segitiga atas ($A = U\,T\,U^*$), dengan A adalah hasil dari proses dekomposisi schur, T adalah matriks segitiga atas dan U^*adalah matriks uniter yang sudah ditranspose dan konjugat [7]. Adapun tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan dan mengetahui proses dekomposisi schur pada matriks – matriks hermite .

II. DEKOMPOSISI SCHUR PADA MATRIKS-MATRIKS HERMITE

Pada artikel ini akan dibahas definisi, teorema, notasi dan hasil dari penelitian prosedur dekomposisi schur pada matriks-matriks hermite.

2.1. Matriks-matriks hermite

Di dalam aljabar dipelajari tentang matriks, diantaranya untuk mengetahui perhitungan determinan, nilai eigen, vektor eigen dan lain sebagainya. Dalam artikel ini peneliti menggunakan tentang matriks-matriks hermite.

Definisi 2.1.[2]. Matriks bujur sangkar A dengan unsur kompleks jika $A = A^*$, dengan A^*= $\bar{A}^t$.

Contoh: matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$

A^t = $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{A}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$. Jadi terbukti bahwa $A = A^*$.

Jika A adalah suatu matriks dengan entri real, maka $A = A^*$. Khususnya jika A adalah matriks real yang simetri, maka A adalah hermite. Matriks hermite mempunyai banyak sifat menarik, sebagaimana akan kita lihat pada teorema berikut ini.

Teorema 2.1.[6]. Nilai-nilai eigen suatu matriks hermite semuanya adalah real. Selanjutnya, vektor-vektor eigen yang dimiliki oleh nilai-nilai eigen yang berbeda adalah ortogonal.

Bukti: Misalkan A adalah matriks hermite dan λ adalah nilai eigen dari matriks A, dan V adalah vektor eigen dari λ, maka λ adalah real dan V ortogonal.

Contoh:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$
Maka diperoleh nilai eigen dari$\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 0$ dan vektor eigennya adalah $V_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$

Definisi 2.2. [2]. Suatu matrik U^{nxn}, disebut sebagai uniter jika vektor-vektor kolomnya membentuk suatu himpunan ortonormal C^n.

Suatu matriks dikatakan uniter jika vektor-vektor kolomnya membentuk himpunan ortonormal, hal ini bisa diselesaikan dengan menggunakan proses *Gram-Schmid*.

Adapun proses *Gram-schmid* adalah sebagai berikut:

Langkah 1 .$V_1' = \frac{V_1}{\|V_1\|}$
Langkah 2. $V_2' - proy_w\, V_2 = V_2 - \langle V_2, V_1' \rangle V_1'$
Langkah 3. $V_3' - proy_w\, V_3 = V_3 - \langle V_3, V_1' \rangle V_1' - \langle V_3, V_2' \rangle V_2'$
$V_3' = \frac{V_3 - proy_w\, V_3}{\|V_3 - proy_w\, V_3\|}$

Akibat 1.1. jika nilai-nilai eigen suatu matriks hermite A adalah tertentu, maka akan terdapat matriks uniter U yang mendiagonalkan A.
Contoh: Misalkan
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$
Akan dicari matriks uniter U yang mendiagonalkan A.
Penyelesaian. Nilai-nilai eigen dari matriks A adalah λ_1= 3 dan $\lambda_2 = 0$ dengan vektor-vektor eigen yang bersesuaian adalah $V_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$. Misalkan

$$V_1' = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$V_2' = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

Jadi

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

dan didapatkan T_k adalah matriks segitiga atas.

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga tebukti bahawa matriks uniter U mendiagonalkan matriks A.

2.2. Dekomposisi Schur

Dalam aljabar linier ada beberapa macam dekomposisi, diantaranya adalah dekomposisi nilai singular, dekomposisi QR, dekomposisi cholesky dan dekomposisi schur. Dalam artikel ini dekomposisi yang digunakan adalah dekomposisi schur.

Definisi 2.2.1.[7].proses diagonalisasi suatu matriks persegi sebagai perkalian matriks uniter dengan matriks segitiga atas, hal ini bisa ditulis sebagai berikut: $(A = U\,T\,U^*)$.

Teorema 2.2.1.[2]. (Teorema Schur) Untuk setiap matriks A yang berordo $n\,x\,n$, terdapat matriks uniter U sehingga T_k adalah matriks segitiga atas (upper triangular).

Bukti : Pembuktian dilakukan dengan melakukan induksi terhadap n. Hasilnya jelas jika $n = 1$. Asumsikan bahwa hipotesis tersebut berlaku untuk matriks $k\,x\,k$ dan misalkan A adalah suatu matriks $(k+1)$ x $(k+1)$. Misalkan λ_1 adalah nilai eigen dari matriks A dan w_1 adalah vektor eigen suatu milik λ_1. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt.[2]. Disusun w_2,.....w_{k+1} sedemikian rupa sehingga $(w_1, \ldots.. w_{k+1})$ adalah suatu basis ortonormal untuk C^{k+1}. Misalkan W adalah suatu matriks yang vektor kolom ke-i nya adalah w_1 untuk $i = 1, \ldots k+1$ jadi, dengan susunan ini, W adalah uniter.[6]. Kolom pertama dari $W^H A\,W$ akan menjadi $W^H A w_1$.

$$W^H A w_1 = \lambda_1\, W^H w_1. = \lambda_1\, e_1$$

Jadi $W^H AW$ adalah suatu matriks berbentuk

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & x\,x \ldots x \\ \hline 0 & \\ \vdots & M \\ 0 & \end{array}\right)$$

Dimana M adalah suatu matriks $k\,x\,k$. Berdasarkan hipotesis induksi, terdapat suatu matriks uniter V_1 yakni $k\,x\,k$, sedemikian rupa sehingga ${V_1}^H\,M\,V_1 = T_1$, dimana T_1 adalah matriks segitiga. Misalkan,

$$V = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ \ldots\ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & V_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

Disini V adalah uniter dan

$$V^H\, W_H AWV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & x \cdots x \\ \hline 0 & \\ \vdots & {V_1}^H M\, V_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & x \ldots x \\ \hline 0 & \\ \vdots & T_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

$$= T$$

Misalkan $U = W\ V$. Matriks U adalah uniter, karena

$$U^H U = (W\ V)^H W\ V = V^H W^H W V = I$$

dan $U^H A U = T$

Faktorisasi $A = UTU^H$ seringkali dirujuk sebagai *dekomposisi Schur* dari A. Pada kasus dimana matriks A adalah hermite, maka matriks T akan menjadi diagonal.

2.3. Algoritma Dekomposisi Schur

Algoritma 2.3.1. [7]. Algoritma dekomposisi schur.

Input : Matriks hermite $A \in \mathbb{C}^{mxm}$

Output : Matriks uniter U *dan segitiga atas* T *sehingga* $A = U^*\ T\ U$

(i). Mencari nilai eigen dari matriks A, misalkan $E = \{\lambda_i\}, i = 1, 2, \ldots$m dengan λ_i = nilai eigen dari matriks A.

(ii).Tentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i Dipilih sebarang $\lambda_{n_k} \in$ E ,maka terdapat vektor eigen v_{n_k} yang bersesuaian dengan λ_{n_k}

(iii) Dibentuk $E' = E - \{\lambda_{n_k}\}$, dengan λ_{n_k} = nilai eigen yang dipilih

(iv).Jika v_{n_k} bukan vektor normal, maka bentuk $v_{n_k}{}' = \frac{v_{n_k}}{\|v_{n_k}\|}$, Jika v_{n_k} merupakan vektor normal, maka bentuk $v_{n_k{}'} = v_{n_k}$

(v). Dibentuk himpunan ortonormal $V_k = \{V_k{}', w_1{}' \ldots V_{m-k}\}$ dan matriks uniter $U_{k'}$= $[V_{nk}{}'\ w_1 \ldots V_{m-k}]$

(vi).Dibentuk matriks $U_k = \begin{bmatrix} I_k & \bar{0}_k{}' \\ \bar{0}_k & U_k{}' \end{bmatrix}$

dengan I_k matriks identitas di $\mathbb{C}^{(k-1)x\,(k-1)}$, dan $\bar{0} \in \mathbb{C}^{(k-1)x\,(m-k+1)}$

(vii). Dibentuk matriks $C_k = A$ dan $k = 1$

(viii).Dibentuk matriks $T_k = U_k{}^*\ C_k\ U_k$

(ix). Matriks T_k akan berbentuk $\begin{bmatrix} B_k & \bar{z}_k{}^* \\ \bar{0}_k & K_k \end{bmatrix}$ dengan $B_k = \begin{bmatrix} \lambda_{n_1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_{n_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{kxk}$, $\bar{0}_k$, $\bar{z}_k \in \mathbb{C}^{k\,(m-k)}$, dan $K_k \in \mathbb{C}^{(m-k)x\,(m-k)}$, matriks B_k merupakan matriks segitiga atas dengan entri-entri diagonalnya adalah nilai eigen $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots \lambda_{n_k}$

(x). Jika matriks K_k bukan merupakan matriks segitiga atas maka langkah 2-10 diulang dengan $k = k + 1$ dan $C_k = K_k$. Jika matriks K_k merupakan matriks segitiga, maka lanjutkan ke langkah 11

(xi).Bentuk matriks uniter $U = U_k{}^* \ldots U_2{}^* U_1{}^*$

Adapun proses dekomposisi schur pada matriks-matriks hermite adalah sebagai berikut:

2.3.2. Proses dekomposisi schur pada matriks hermite berordo 2 x 2.

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$, akan dicari prosedur dekomposisi schur dari matriks A.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$

(i).Mencari nilai eigen

Maka diperoleh nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 0$, sehingga didapatkan E= $\{\lambda_1, \lambda_2\}$
$= \{3, 0\}$ merupakan himpunan nilai eigennya.

(ii).Dipilih sebarang $\lambda_{n_k} \in E$, maka terdapat vektor eigen v_{n_k} yang bersesuaian dengan λ_{n_k}

1. Untuk $\lambda = 3$, maka diperoleh vektor eigen dari $\lambda = 3$ adalah $\begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$
2. Untuk $\lambda = 0$, maka diperoleh vektor eigen dari $\lambda = 0$ adalah $\begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$

Sehingga didapatkan vektor eigen $V_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix}$

(iii).Dibentuk $E'= E - \{\lambda_{n_k}\} = E - \{3\} = 0$

(iv).Karena V_1 dan V_2 ortogonal tetapi tidak ortonormal, maka dinormalkan

- $V_{1'} = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$
- $V_{2'} = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1+i \end{bmatrix}$

(v).Dibentuk himpunan V_1=$\{V_1', V_2'\}$, dan matriks uniter $U_1' = [V_1' \; V_2']$

$V_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\}$

$U_1' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$

(vi).Dibentuk matriks $U_1 = \begin{bmatrix} I_k & \bar{0}_k{}^* \\ \bar{0}_k & U_k' \end{bmatrix}$

dengan I_1 matriks identitas, karena k=1 maka matriks identitas di $\mathbb{C}^{(1-1)x\,(1-1)} = \mathbb{C}^0$ dan $\bar{0} \in \mathbb{C}^{(1-1)x\,(2-1+1)} = \bar{0} \in \mathbb{C}^0$, maka matriks I_1 tidak ada.

$U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$ dan $U_1{}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}$

(vii). Dibentuk matriks $C_1 = A$ dan $k = 1$

$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ dan $k = 1$

(viii).Dibentuk matriks $T_1 = U_1{}^* \; C_1 \, U_1$

Maka didapatkan matriks $T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ix).Matriks T_1 akan berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ dengan

$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{n1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_{n_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{kxk}$, $\bar{0}_k, \bar{z}_k \in \mathbb{C}^{k\,(m-k)}$, dan $K_k \in \mathbb{C}^{(m-k)x\,(m-k)}$, matriks B_1 merupakan matriks segitiga atas dengan entri-entri diagonalnya adalah nilai eigen

$\lambda_1 = 3\ dan\ \lambda_2 = 0$

$K_k = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(x). Karena matriks K_k merupakan matriks segitiga atas maka prosedur dekomposisi schur berhenti.

(xi).A = $U_1\, T_1\, U_1^*$

= $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}$

2.3.3. Proses dekomposisi schur pada matriks hermite yang berordo 3 x 3.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2i \\ 0 & 2i & 2 \end{bmatrix}$, akan dicari prosedur dekomposisi schur dari matriks A.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2i \\ 0 & 2i & 2 \end{bmatrix}$

(i).Mencari nilai eigen

Maka diperoleh nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4$ dan $\lambda_3 = 0$ sehingga didapatkan E= $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ = {2, 4, 0} merupakan himpunan nilai eigennya.

(ii).Dipilih sebarang $\lambda_{n_k} \in E$, maka terdapat vektor eigen v_{n_k} yang bersesuaian dengan λ_{n_k}

1. Untuk $\lambda = 2$, maka diperoleh vektor eigen dari $\lambda = 2$ adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2. Untuk $\lambda = 4$, maka diperoleh vektor eigen dari $\lambda = 4$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$
3. Untuk $\lambda = 0$, maka diperoleh vektor eigen dari $\lambda = 0$ adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$

Sehingga didapatkan vektor eigen $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$

(iii).Dibentuk $E = E$ - $\{\lambda_{n_k}\}$ = E - {2} = {4, 0}

(iv).Karena V_{nk} merupakan vektor normal maka bentuk $V_{nk}{}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(v).Dibentuk himpunan V_1={$v_1{}', v_2{}'$} dan matriks uniter $U_1{}'$ = [$v_1{}'$ $v_2{}'$]

$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dan $U_1{}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(vi).Dibentuk matriks $U_1 = \begin{bmatrix} I_k & \bar{0}_k \\ \bar{0}_k & U_k' \end{bmatrix}^*$, dengan I_1 matriks identitas, karena $k = 1$ maka matriks identitas di $\mathbb{C}^{(1-1)x\,(1-1)} = \mathbb{C}^0$ dan $\bar{0} \in \mathbb{C}^{(1-1)x\,(2-1+1)} = \bar{0} \in \mathbb{C}^0$, maka matriks I_1 tidak ada.

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{dan } U_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

(vii). Dibentuk matriks $C_1 = A$ dan $k = 1$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2i \\ 0 & 2i & 2 \end{bmatrix} \text{dan } k = 1$$

(viii).Dibentuk matriks $T_1 = U_1^*\ C_1\, U_1$

Maka didapatkan matriks $T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ix).Matriks T_1 akan berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ dengan,

$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{n1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_{n_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{kxk}$, $\bar{0}_k, \bar{z}_k \in \mathbb{C}^{k\,(m-k)}$, dan $K_k \in \mathbb{C}^{(m-k)x\,(m-k)}$, matriks B_1 merupakan matriks segitiga atas dengan entri-entri diagonalnya adalah nilai eigen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_2 = 0$

$$K_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(x). Karena matriks K_k merupakan matriks segitiga atas maka prosedur dekomposisi schur berhenti.

(xi).$A = U_1\, T_1\, U_1^*$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2i \\ 0 & 2i & 2 \end{bmatrix}$$

III. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab II, maka dapat diambil kesimpulan bahwa dekomposisi schur pada matriks-matriks hermite dengan berordo 2 x 2 dan 3x3, dapat menggunakan prosedur atau langkah-langkahnya sebagai berikut :

(i). Mencari nilai eigen dari matriks A, misalkan $E = \{\lambda_i\}, i = 1, 2, \ldots m$ dengan λ_i = nilai eigen dari matriks A.

(ii). Tentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i Dipilih sebarang $\lambda_{n_k} \in$ E , maka terdapat vektor eigen V_{n_k} yang bersesuaian dengan λ_{n_k}

(iii).Dibentuk $E' = E$ - $\{\lambda_{n_k}\}$, dengan λ_{n_k} = nilai eigen yang dipilih.

(iv).Jika v_{n_k} bukan vektor normal, maka bentuk $V_{n_k}{}' = \frac{V_{n_k}}{\|V_{n_k}\|}$, Jika V_{n_k} merupakan vektor normal, maka bentuk $V_{n_k}{}' = V_{n_k}$

(v). Dibentuk himpunan ortonormal $V_k = \{V_k{}', w_1{}' \dots w_{m-k}\}$ dan matriks uniter $U_k{}^* = [V_{nk}{}'\ w_2{}' \dots V_{m-k}]$.

(vi).Dibentuk matriks $U_k = \begin{bmatrix} I_k & \bar{0}_k{}^* \\ \bar{0}_k & U_k{}' \end{bmatrix}$, dengan I_k matriks identitas di $\mathbb{C}^{(k-1)x\,(k-1)}$, dan $\bar{0} \in \mathbb{C}^{(k-1)x\,(m-k+1)}$.

(vii).Dibentuk matriks $T_k = U_k{}^*\, C_k\, U_k$

(viii).Matriks T_k akan berbentuk $\begin{bmatrix} B_k & \bar{z}_k{}^* \\ \bar{0}_k & K_k \end{bmatrix}$ dengan $B_k = \begin{bmatrix} \lambda_{n_1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_{n_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{kxk}$, $\bar{0}_k$, $\bar{z}_k \in \mathbb{C}^{k\,(m-k)}$, dan $K_k \in \mathbb{C}^{(m-k)x\,(m-k)}$, matriks B_k merupakan matriks segitiga atas dengan entri-entri diagonalnya adalah nilai eigen $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \dots \lambda_{n_k}$

(ix).Jika matriks K_k bukan merupakan matriks segitiga atas maka langkah 2-10 diulang dengan $k = k + 1$ dan $C_k = K_k$

(x). Jika matriks K_k merupakan matriks segitiga, maka lanjutkan ke langkah 11

(xi). Bentuk matriks uniter $U = U_k{}^* \dots U_2{}^* U_1{}^*$.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
[2] Anton, Howard. 2000. *Dasar dasar Aljabar Linier*. Batam:Interaksa.
[3] Ayres, Frank. 1984. *Matriks*. Jakarta: Erlangga.
[4] Hadley, G. 1983. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.
[5] Herstein. 1989. *Matrix Theory and Linear Algebra*. New York: Macmillan Publishing Company.
[6] Leon, J. Steven. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.
[7] Wijna, 2007-2009. *Dekomposisi Matriks*. Jakarta: Erlangga.