ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

TINGKAH LAKU FUNGSI KOMPLEKS PADA TITIK SINGULAR TERASING

Mujizatin Fadiana

Prodi Pendidikan Matematika FKIp UNIROW Tuban
mujizatin000@gmail.com

Abstrak

Sebuah fungsi kompleks *f* tidak selalu dapat dideferensialkan di setiap bilangan kompleks z_0. Fungsi *f* yang demikian disebut fungsi tak analitik pada z_0. Sedangkan titik z_0 merupakan titik singular (singularitas) fungsi *f*, bila *f* tidak analitik pada z_0, tetapi setiap persekitaran dari z_0 memuat titik analitik dari *f*. Titik singular dari fungsi *f* dibedakan menjadi dua, yaitu: titik singular tak terasing dan titik singular terasing. Berdasarkan nilai bagian utama ekspansi Laurent fungsi *f*, titik singular terasing dibagi menjadi tiga, yaitu kutub *(pole)*, titik singular yang dapat dihilangkan *(Removable Singular Point)*, dan titik singular pokok *(Essential Singular Point)*. Selanjutnya dalam artikel ini akan dibahas tentang tingkah laku suatu fungsi *f* di sekitar masing-masing titik singular terasing.

Kata kunci: *Ekspansi Laurent, Singularitas Fungsi kompleks*

I. PENDAHULUAN

Dalam fungsi kompleks, tidak selamanya sebuah fungsi *f* dapat dideferensialkan di setiap bilangan kompleks z_0. Fungsi kompleks yang tidak dapat dideferensialkan di z_0 disebut fungsi tak analitik di z_0. Sedangkan titik z_0 dimana fungsi *f* tidak analitik, tetapi setiap persekitaran dari z_0 memuat titik analitik dari *f*, maka z_0 disebut sebagai titik singular atau singularitas fungsi *f*. Selanjutnya akan dibahas tentang singularitas fungsi *f* beserta jenis-jenisnya dan sifat-sifatnya.

II. PEMBAHASAN

Jika $f(z)$ tidak analitik di z_0 dan $\forall N_r(z_0), \exists z \in N_r(z_0)$ sehingga *f* analitik di *z* maka z_0 titik singular $f(z)$. Terdapat dua macam titik singular, yaitu

(i). Titik singular terasing.

z_0 titik singular terasing *f* jika $\exists N_r(z_0)$ sehingga *f* analitik $\forall z \in N_r(z_0)$ kecuali di z_0 sendiri.

Contoh 1:

$f(z)=\frac{4i}{z^2+1}$, titik singular $f(z)$ yaitu $z_0=\pm i$ merupakan titik singular terasing.

(ii). Titik singular tak terasing.

z_0 titik singular tak terasing $\Leftrightarrow$ z_0 titik singular f dan setiap persekitaran z_0 memuat paling sedikit satu titik singular f yang lain dari z_0.

Contoh 2:

$f(z)=\log z$ (setiap titik pada sumbu riil negatif merupakan titik singular tak terasing).

III. Residu

Jika z_0 titik singular terasing fungsi f maka $\exists r>0$ sehingga f analitik di dalam daerah $D=\{z\,|\,0<|z-z_0|<r\}$. Selanjutnya, fungsi f dapat dinyatakan dalam deret Laurent di dalam *D*, yaitu

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots$$

dengan $b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$, $n=1,2,\ldots$ dan C adalah sebarang lintasan tertutup berarah positif di dalam *D* yang mengelilingi z_0.

Khusus untuk n = 1 diperoleh,

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz \qquad \text{.........… (6.1)}$$

Bilangan kompleks b_1 yaitu koefisien dari $(z-z_0)^{-1}$ pada deret Laurent fungsi f di sekitar titik singular terasing z_0 disebut **residu** f di titik singular terasing z_0, ditulis

$$b_1=\operatorname{Res}[f,z=z_0].$$

Setiap fungsi mempunyai residu di titik singularnya.

Contoh 3:

Diketahui $f(z)=\frac{e^{-z}}{(z-2)^3}$. $f(z)$ mempunyai titik singular terasing $z_0=2$, sehingga f analitik di dalam daerah $D=\{z\,|\,0<|z-2|<\infty\}$. Deret Laurent fungsi f di dalam *D* yaitu

$$\frac{e^{-z}}{(z-2)^3} = \frac{e^{-2}e^{-(z-2)}}{(z-2)^3} = \frac{e^{-2}}{(z-2)^3}e^{-(z-2)}$$

$$= \frac{e^{-2}}{(z-2)^3}\left[1+(-(z-2))+\frac{(-(z-2))^2}{2!}+\cdots\right]$$

$$= \frac{e^{-2}}{(z-2)^3}\left[1-(z-2)+\frac{(z-2)^2}{2!}+\cdots\right]$$

$$= e^{-2}\left[\frac{1}{(z-2)^3}-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{2(z-2)}+\cdots\right]$$

Diperoleh $b_1 = \mathrm{Re}\,s\,[f, z=2] = \frac{e^{-2}}{2} = \frac{1}{2e^2}$. □

Deret Laurent fungsi f di sekitar titik singular terasing z_0 yaitu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots}_{\substack{bagian\ utama\ (principle\ \ part) \\ f\ \ di\ titik\ \ z_0}}$$

Bagian utama *f* di titik singular z_0 digunakan untuk membedakan jenis titik singular terasing.

1. Jika bagian utama *f* di titik singular terasing z_0 memuat paling sedikit satu suku tak nol dan jumlah suku tak nol tersebut berhingga, maka terdapat bilangan asli *m* sehingga $b_m \neq 0$, sedangkan $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$. Deret Laurent fungsi *f* menjadi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}.$$

   Selanjutnya z_0 disebut kutub (*pole*) tingkat *m*. Jika *m* = 1 maka z_0 disebut **kutub tunggal (*simple pole*).**

Contoh 4:

a. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3}$, $f(z)$ mempunyai titik singular terasing $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left\{1-\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z^{2n})}{(2n)!}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{z}{4!} + \frac{z^3}{6!} + \cdots \qquad , \quad 0 < |z| < 0$$

   Jadi $z_0 = 0$ merupakan kutub tunggal.

b. $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}$, $f(z)$ mempunyai titik singular terasing $z_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2} e^{-z} \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1 - z + \frac{z^2}{2!} - \cdots\right] \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \cdots \qquad , \qquad 0 < |z| < \infty
\end{aligned}
$$

Jadi $z_0 = 0$ merupakan kutub tingkat 2.

2. Jika bagian utama *f* di titik singular terasing z_0 mempunyai tak berhingga banyak suku , maka z_0 disebut **titik singular terasing pokok**.

Contoh 5:

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f(z)$ mempunyai titik singular terasing $z_0 = 0$.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

Jadi $z_0 = 0$ merupakan titik singular terasing essensial.

3. Jika koefisien b_n pada bagian utama *f* di titik singular terasing z_0 semuanya nol, maka z_0 disebut titik singular yang dapat dihapus (*removable*).

Contoh 6 :

$f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$, $f(z)$ mempunyai titik singular terasing $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left[e^z - 1\right] = \frac{1}{z}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right] = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

Jadi $z_0 = 0$ merupakan titik singular yang dapat dihapus (*removable*).

Diketahui $f : D \to K, D \subseteq K$ tingkah laku sebuah fungsi *f* di sekitar titik singular terasing $z_0 \in K$ berbeda-beda, tergantung pada jenis singularitas singular yang dapat dihilangkan, atau titik singular terasing dari z_0, baik berupa kutub, pokok. Berikut ini akan dibahas tingkah laku fungsi *f* pada masing-masing titik tersebut

Teorema 1:

Jika z_0 adalah sebuah kutub dari fungsi *f* , maka $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

Bukti:

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

Diasumsikan bahwa f mempunyai sebuah kutub bertingkat m di z_0 sehingga bisa dituliskan dalam bentuk $f(z)=\dfrac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$ dengan $\phi(z)$ analitik dan tak nol di z_0,

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{\phi(z)}$$

Bila kedua ruas pada persamaan di atas diambil nilai limitnya, maka diperoleh:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m}{\phi(z)z}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m}{\lim\limits_{z\to z_0}\phi(z)}=\frac{0}{\phi(z_0)}=0$$

Karena $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$, maka berdasarkan definsi limit takhingga, nilai $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

Teorema 2:
Jika z_0 adalah titik singular terasing yang dapat dihilangkan dari fungsi kompleks f, maka f analitik dan terbatas di persikataran terhapus dari z_0.
Bukti :
Diketahui z_0 adalah titik singular yang dapat dihilangkan dari fungsi f yang terdefinisi pada daerah $0<|z-z_0|<r, r>0$ dan kontinu pada daerah tersebut. Diambil sebarang daerah tertutup $|z-z_0|\le\varepsilon$ dan $\varepsilon<r$. Karena f analitik pada daerah $0<|z-z_0|<r$ juga f kontinu pada daerah tersebut, maka f akan analitik dan terbatas pada daerah $|z-z_0|\le\varepsilon$ kecuali di titik z_0. Dengan kata lain, untuk suatu persekitaran terhapus $0<|z-z_0|<\varepsilon$, maka f analitik dan terbatas

Selanjutnya akan dijelaskan tingkah laku fungsi f di dekat titik singular pokok. Tapi sebelumnya akan dibuktikan terlebih dahulu Teorema Riemann, yang mana teorema ini dibutuhkan untuk membuktikan teorema yang akan menjelaskan tingkah laku fungsi f di dekat titik singular pokok.

Teorema Riemann:
Jika fungsi kompleks f analitik dan terbatas di persekitaran terhapus $0<|z-z_0|<\varepsilon$. Jika f tidak analitik di z_0 maka z_0 adalah titik singular yang dapat dihilangakn dari f.
Bukti:

Karena f analitik pada sebuah persekitaran terhapus $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, maka titik $z_0 \notin 0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Akibatnya f tidak analitik di z_0, atau z_0 adalah sebuah titik singular terasing dari f. Berdasarkan Teorema Laurent, *f(z)* dapat diuraikan dengan deret Laurent sebagai berikut:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Diketahui P adalah sebuah lingkaran $|z - z_0| = \rho$ yang berarah positif, dengan $\rho < \varepsilon$. Fungsi f dapat didefinisikan dan analitik di dalam dan pada lingkaran P. Berdasrkan teorema Laurent, maka b_n pada persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ pada } |z - z_0| = \rho .$$

Karena f terbatas pada sebuah persekitaran terhapus $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ dari titik z_0, maka terdapat konstanta M > 0, sedemikian hingga $|f(z)| \leq M$ pada $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Sehingga persamaan di atas menjadi

$$|b_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_P \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{-n+1}} 2\pi\rho \right| = M\rho^n$$

Jika nilai ρ diketahui, maka b_n adalah sebuah konstanta. Karena nilai ρ dapat dipilih sedemikian kecil, maka dapat diasumsikan bahwa $b_n = 0$ untuk n = 1, 2, 3,....Karena $b_n = 0$ maka z_0 adalah titik singular yang dapat dihilangkan dari f.

Teorema 3:

Diketahui fungsi $f : D \to K, D \subseteq K$ dan $w_0 \in K$. Jika z_0 adalah singlaritas pokok fungsi *f*, maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\delta > 0$ berlaku $|f(z) - w| < \varepsilon$ untuk setiap z di persekitaran terhapus $0 < |z - z_0| < \delta$

Bukti:

Karena z_0 adalah singularitas pokok dari f, maka terdapat sebuah persekitaran terhapus berjari-jari $\delta > 0$ dari z_0 dimana fungsi f analitik pada daerah tersebut.

Andaikan $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ tidak dipenuhi untuk sebarang titik pada daerah tersebt, maka $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$ dengan $z \in 0 < |z - z_0| < \delta$. Sehingga terdapat sebuah fungsi *g(z)* dengan $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w_0}$ untuk

$0 < |z - z_0| < \delta$ yang terbatas dan analitik pada domain. Sehingga z_0 adalah singularitas yang dapat dihilangkan dari *g(z)*
Andaikan g analitik pada z_0, maka g terdefinisi di z_0. Dalam hal ini ada dua kemungkinan nilai, yaitu:

a. $g(z_0) \neq 0$

b. $g(z_0) = 0$

a. Jika $g(z_0) \neq 0$, maka *f(z)* dapat dituliskan dengan $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + w_0$ dengan $z \in 0 < |z - z_0| < \delta$. *f* akan analitik di z_0 dan dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$f(z_0) = \frac{1}{g(z_0)} + w_0 .$$

Karena *f* terbatas dan analitik pada z_0, maka z_0 adalah titik singular yang dapat dihilangkan dari fungsi *f*. Dengan demikian pengandaian bertentangan dengan yang diketahui.

b. Jika $g(z_0) = 0$,
Berdasarkan penjelasan sebelumnya, *g(z)* tidak sama dengan nol di persekitaran $|z - z_0| < \delta$. Sehingga *f* mempunyai sebuah kutub bertingkat *m* di titik z_0. Sehingga kontradiksi dengan yang diketahui. Hal ini berarti bahwa $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ di suatu z di persekitaran terhapus $0 < |z - z_0| < \delta$ dari z_0

III. KESIMPULAN

Tingkah laku fungsi *f* di sekitar titik singular terasing adalah sebagai berikut:

a. Jika z_0 adalah sebuah kutub dari fungsi *f*, maka $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

b. Jika z_0 adalah titik singular terasing yang dapat dihilangkan dari fungsi kompleks *f*, maka *f* analitik dan terbatas di persikataran terhapus dari z_0.

c. Jika z_0 adalah singlaritas pokok fungsi *f*, maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan real $\delta > 0$ berlaku $|f(z) - w| < \varepsilon$ untuk setiap z di persekitaran terhapus $0 < |z - z_0| < \delta$

IV. DAFTAR PUSTAKA

Ahlflors. 1979. Complex Analysis, Third edition. Singapore : Mc. Graw-Hill Book Company

Asmar. Applied Complex Analysis with Partial Differential Equations. USA : Prentice Hall

Churchill. 1960. Complex Variables and Application. USA: Mc. Graw-Hill Book Company

Paliouras. 1987. Peubah Kompleks Untuk Ilmuwan dan Insinyur. Jakarta: Erlangga

Soemantri. 1996. Fungsi Variabel Kompleks. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Dan Kebudayaan

Spiegel. 1994. Peubah Kompleks Dengan Pengenalan Pemetaan Konformal dan Penerapannya. Jakarta: Erlangga