MENENTUKAN POHON RENTANG
PADA GRAF KINCIR DENGAN REPRESENTASI MATRIKS

Okky Panca Pratama

Matematika FMIPA, Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW) Tuban
okky_panca@ymail.com

Abstrak

Salah satu permasalahan dalam topik graf adalah menentukan banyaknya pohon rentang dari suatu graf. Pohon rentang adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon. Untuk menentukan pohon rentang dari suatu graf terhubung, biasanya dilakukan dengan cara memotong/ memutus sisi-sisi sehingga graf tersebut tidak lagi mengandung sikel. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk umum banyaknya pohon rentang pada graf kincir ($W_2{}^m$) dengan menggunakan representasi matriks.

Kata kunci: *Pohon Rentang, Representasi Matriks dan Graf Kincir*.

I. PENDAHULUAN

Pohon adalah graf terhubung yang *asiklik* (tidak memuat sikel). Sebuah pohon selalu terdiri dari *n* titik dan *n-1* sisi [1]. Suatu pohon rentang dari graf G adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon[3]. Menentukan banyaknya pohon rentang dari suatu graf memerlukan waktu yang lama, sehingga perlu digunakan cara atau rumusan baku untuk menentukan banyaknya pohon rentang dari suatu graf.

Beberapa masalah dalam teori graf dapat diselesaikan dengan mudah apabila graf yang dihadapi dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Bentuk graf yang dinyatakan dalam suatu matriks kemudian diselesaikan dengan metode yang berlaku pada matriks [5]. Representasi matriks terdapat istilah matriks *Adjacent* (terhubung langsung), matriks *Incident* (terkait langsung) dan matriks derajat [6]. Untuk menentukan banyaknya pohon rentang pada suatu graf terhubung, dapat dilakukan dengan representasi matriks, yaitu dengan menghitung nilai kofaktor dari matriks $D(G) - A(G)$, di mana $D(G)$ adalah matriks derajat dan $A(G)$ adalah matriks *Adjacent* dari graf G. Secara lengkap hal tersebut dijelaskan dalam teorema berikut ini **Teorema 1** banyak pohon rentang τ(G) dari suatu graf G adalah sama dengan nilai setiap kofaktor dari matriks D(G) – A(G).

Dalam teorema yang disebutkan Skiena ini, tidak disebutkan lebih jelas mengenai kofaktor yang dihitung untuk menentukan banyak pohon rentang dari suatu graf G. Sementara kita tahu antara kofaktor C_{11} dengan C_{12} dari suatu matriks bisa berbeda. Lebih terperinci teorema Matriks-Pohon disampaikan oleh Vivek Dhand sebagai berikut:

Teorema 2 Misalkan $L(G)$ adalah matriks Laplace dimana $L(G) = D(G) - A(G)$. Dan $\acute{L}(G)$ didefinisikan sebagai matriks yang diperoleh dengan menghapus baris dan kolom pertama dari $L(G)$. Maka, banyak pohon rentang $\tau(G)$ = det $\acute{L}(G)$. Dalam teorema Vivek Dhand determinan Ĺ(G) adalah sama dengan nilai Minor Unsur M_{11} dari matriks $L(G)$ dan sama juga dengan nilai dari kofaktor C_{11}. Sehingga dari penjelasan teorema matriks-pohon oleh Vivek Dhand dan Skiena dapat ditarik kesimpulan bahwa banyak-nya pohon rentang τ(G) dari suatu graf G adalah sama dengan nilai kofaktor C_{11} dari matriks $D(G) - A(G)$.

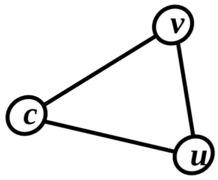
Pada penelitian ini akan membahas cara menentukan banyaknya pohon rentang pada graf kincir dengan representasi matriks. Graf kincir adalah gabungan dari graf komplit K_1 dan mK_2 yang dinotasikan dengan $W_2^m = K_1 + mK_2$ [5].

II. PEMBAHASAN

2. Pohon Rentang Pada Graf Kincir Dengan Representasi Matriks

2.1 Graf Kincir W_2^1

Graf Kincir W_2^1 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. 1 Graf Kincir $W_2{}^1$

Pada graf kincir W_2^1 didapatkan matriks adjacency dan matriks derajatnya sebagai berikut :

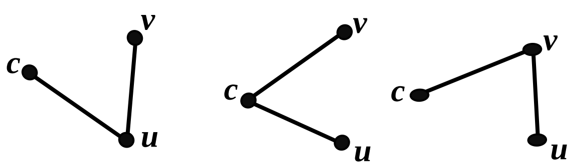
$$A(W_2^1) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} c & v & u \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ v \\ u \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad D(W_2^1) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} c & v & u \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ v \\ u \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks $A(W_2^1)$ dan $D(W_2^1)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(W_2^1) - A(W_2^1)$ untuk menentukan banyak pohon rentang dari graf komplit W_2^1.

$$D(W_2^1) - A(W_2^1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11} dari $D(W_2^1) - A(W_2^1) = (-1)^2 . det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$

Jadi banyaknya pohon rentang pada graf kincir W_2^1adalah = 3

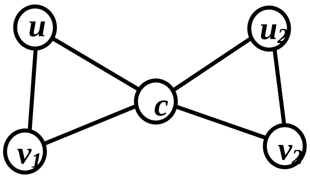


Gambar 2. 2 Pohon rentang dari $W_2{}^1$

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

2.2 Graf Kincir W_2^2

Graf Kincir W_2^2 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. 3 Graf Kincir W_2^2

Pada graf kincir W_2^2 didapatkan matriks adjacency dan matriks derajatnya sebagai berikut :

$$A(W_2^2) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c & v_1 & v_2 & u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad D(W_2^2) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c & v_1 & v_2 & u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks $A(W_2^2)$ dan $D(W_2^2)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(W_2^2) - A(W_2^2)$ untuk menentukan banyak pohon rentang dari graf komplit W_2^2.

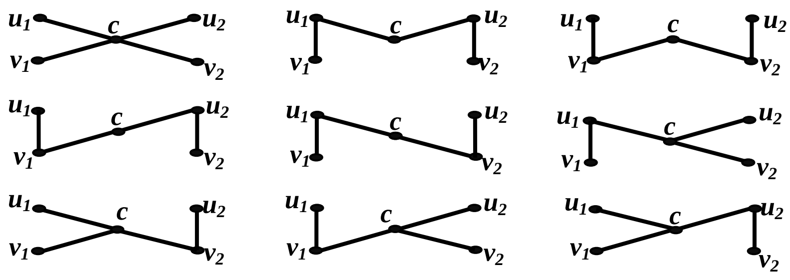
$$D(W_2^2) - A(W_2^2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11}dari $D(W_2^2) - A(W_2^2) = (-1)^2 . det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2 \left| 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right| - 1 \left| 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = 2(2 \times 3) - (1 \times 3) = 9$$

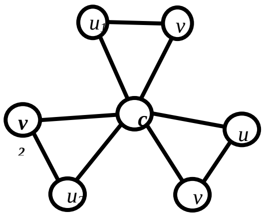
Jadi banyak pohon rentang pada graf kincir (W_2^2) adalah = 9



Gambar 2. 4 Pohon rentang dari graf W_2^2

2.3 Graf Kincir W_2^3

Graf Kincir W_2^3 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. 5 Graf Kincir W_2^3

Pada graf kincir W_2^3 didapatkan matriks adjacency dan matriks derajatnya sebagai berikut :

$$A(W_2^3) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} c & v_1 & v_2 & v_3 & u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} ; D(W_2^3) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} c & v_1 & v_2 & v_3 & u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks $A(W_2^3)$ dan $D(W_2^3)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(W_2^3) - A(W_2^3)$ untuk menentukan banyak pohon rentang dari graf komplit W_2^3.

$$D(W_2^3) - A(W_2^3) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11} dari $D(W_2^3) - A(W_2^3) = (-1)^2 . det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

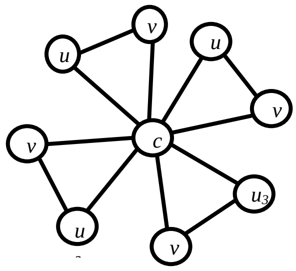
$$= 1 \times 27 = 27$$

Jadi banyaknya pohon rentang pada graf kincir (W_2^3) adalah $= 27$

2.4 Graf Kincir W_2^4

Graf Kincir W_2^4 dapat digambarkan sebagai berikut:

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014



Gambar 2. 6 Graf Kincir W_2^4

Pada graf kincir W_2^4 didapatkan matriks adjacency dan matriks derajatnya sebagai berikut :

$$A(W_2^4) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} c & v_1 & v_2 & & v_4 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} ; D(W_2^4) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} c & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks $A(W_2^4)$ dan $D(W_2^4)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(W_2^4) - A(W_2^4)$ untuk menentukan banyak pohon rentang dari graf komplit W_2^4.

$$D(W_2^4) - A(W_2^4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

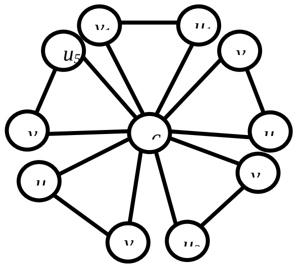
Maka C_{11}dari $D(W_2^4) - A(W_2^4) = (-1)^2 . det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= 1 \times 81 = 81$$

Jadi banyaknya pohon rentang pada graf kincir (W_2^4) adalah $= 81$

2.5 Graf Kincir W_2^5

Graf Kincir W_2^5 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2. 7 Graf Kincir W_2^5

Pada graf kincir W_2^5 didapatkan matriks adjacency dan matriks derajatnya sebagai berikut :

$$A(W_2^5) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} c & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(W_2^5) = \begin{array}{c} \\ c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} c & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks $A(W_2^5)$ dan $D(W_2^5)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(W_2^5) - A(W_2^5)$ untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit W_2^5.

$$D(W_2^5) - A(W_2^5) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11}dari $D(W_2^5) - A(W_2^5)$

$$= (-1)^2 . det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \times 243 = 243$$

Jadi banyak pohon rentang pada graf kincir (W_2^5) adalah $= 243$

Berdasakan data diatas yaitu banyak pohon rentang dari graf kincir (W_2^m), maka diperoleh pola tabel berikut :

Tabel 3.1 Banyaknya Pohon Rentangan graf kincir (W_2^m)

No.	**graf kincir (W_2^m)**	**Banyak pohon rentang**
1	${W_2}^1$	3 atau 3^1
2	${W_2}^2$	9 atau 3^2
3	${W_2}^3$	27 atau 3^3
4	${W_2}^4$	81 atau 3^4
5	${W_2}^5$	243 atau 3^5
...	......	....
m	W_2^m	3^m

Dari tabel diatas diperoleh rumusan banyak pohon rentang dari graf kincir (W_2^m) adalah = 3^m

III. KESIMPULAN

Untuk menentukan banyak pohon rentang pada suatu graf terhubung, dapat dilakukan dengan representasi matriks, yaitu dengan menghitung nilai kofaktor dari matriks $D(G) - A(G)$, di mana nilai kofaktor dari matriks $D(G) - A(G)$ tersebut adalah sama dengan banyak pohon rentang yang bisa didapatkan dari suatu graf G.

Banyak pohon rentang pada graf kincir didapatkan hasil untuk $W_2^1 = 3, W_2^2 = 9, W_2^3 = 27\ , W_2^4 = 81,\ W_2^5 = 243$, dst. Sehingga didapatkan rumus umum dari banyaknya pohon rentang pada graf kincir $W_2^m = 3^m$ untuk $m = 1, 2, 3, \dots$.

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2ndEdition.* California: Wadsworth. Inc.

[2] Munir, Rinaldi 2007. Matematika Diskrit. Bandung. Informatika bandung.
[3] Suryadi, D......... Pengantar Teori dan Algoritma Graph
[4] Nurfalah, Edy....... HandOut Teori Graf. Prodi Matematika FMIPA UNIROW Tuban.
[5] Mudjiati, T. 2008 Dimensi Metrik Graph Kincir. Tesis, Jurusan Matematika FMIPA ITS.
[6] Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP MALANG.