GENERALISASI METODE DEKOMPOSISI COLESKY UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN MATRIKS INTERVAL

Siti Na'imah[1], Warli[2], dan Mu'jizatin Fadiana[3]
Mahasiswa[1] Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW)Tuban
naim_akecii@yahoo.com
Dosen[2] Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW)Tuban
warli66@gmail.com
Dosen[3] Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW)Tuban
mujizatin000@gmail.com

Abstrak

Suatu matriks interval adalah suatu matriks yang elemen-elemennya adalah suatu interval tertutup. Suatu matriks A simetris real dengan semua nilai eigennya lebih dari nol dapat diubah dalam bentuk dekomposisi Cholesky $A = LL^T$, di mana L adalah matriks segitiga bawah dan L^T adalah transpos dari matriks L. Tujuan dari penulisan artikel ini yaitu untuk mengetahui bagaimanakah generalisasi metode dekomposisi Cholesky untuk menyelesaikan sistem persamaan matriks interval.

Kata kunci: *Generalisasi Dekomposisi Cholesky, Matriks Interval dan Sistem Persamaan Matriks Interval.*

I. PENDAHULUAN

Interval klasik dan matriks interval klasik yang dikenalkan oleh Hansen [5] dan Moore [10] dapat pula dilihat dalam Kandasamy [1, 2, 6, 7, 8, 13, 15]. Artikel ini akan menggunakan generalisasi aritmatika interval $\mathbb{D}$ yang dikenalkan oleh Nirmala dkk. [11, 12] dengan memperluas aritmatika interval Kauchers [9]. Operasi aritmatika ini memenuhi sifat-sifat grup dengan operasi penjumlahan dan perkalian dan memenuhi relasi distributif antar interval, yang mana mempertahankan inklusi monotonic.

Misalkan $\mathbb{IR} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2]: a_1 \le a_2, \text{dan } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan dari semua *proper intervals* dan $\overline{\mathbb{IR}} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2]: a_1 > a_2, \text{dan } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan dari semua *improper intervals* pada pada garis interval $\mathbb{R}$. Jika $a_1 = a_2 = a$, maka $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ adalah suatu bilangan real (atau suatu degenerasi interval). Titik Tengah (*mid-point*) dan setengah lebar (*half-width*) dari suatu interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ didefinisikan dengan $m(\tilde{a}) = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$ dan $w(\tilde{a}) = \left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)$. Himpunan dari generalisasi interval (*proper* dan *improper*) didefinisikan dengan $\mathbb{D} = \mathbb{IR} \cup \overline{\mathbb{IR}} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2]: a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Himpunan dari generalisasi interval $\mathbb{D}$ adalah suatu group dengan operasi penjumlahan dan perkalian, yang mana mempertahankan inklusi monotonic [11].

"Dual" adalah sebuah operator monadik penting yang diusulkan oleh Kauchers yang membalikkan titik akhir (*end-point*) interval dan mengungkapkan sebuah elemen ke elemen simetri antara interval yang *proper* dan *improper* di $\mathbb{D}$.

Untuk $\tilde{a} = [a_1, a_2] \in \mathbb{D}$, dual didefinisikan dengan $dual(\tilde{a}) = dual[a_1, a_2] = \tilde{a} = [a_2, a_1]$. Kebalikan (*opposite*) dari suatu interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ adalah $opp\{[a_1, a_2]\} = [-a_1, -a_2]$ di mana adalah invers penjumlahan dari $[a_1, a_2]$ dan $\left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right]$ adalah invers perkalian dari $[a_1, a_2]$, serta $m([a_1, a_2]) = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \neq 0$. Didapatkan $\tilde{a} + (-dual\ \tilde{a}) = \tilde{a} - dual(\tilde{a}) = [a_1, a_2] - dual([a_1, a_2]) = [a_1, a_2] - [a_2, a_1] = [a_1 - a_1, a_2 - a_2] = [0,0]$, dan $\tilde{a} \times \left(\frac{1}{dual\ \tilde{a}}\right) = [a_1, a_2] \times \left(\frac{1}{dual([a_1,a_2])}\right) = [a_1, a_2] \times \left(\frac{1}{[a_2,a_1]}\right) = [a_1, a_2] \times \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right] = \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}\right] = [1,1]$ (lihat [11]).

Proper Proyeksi didefinisikan dengan $pro[a_1, a_2] = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$, *Improper* Proyeksi didefinisikan dengan $imp[a_1, a_2] = [\max\{a, b\}, \min\{a, b\}]$ (lihat [4])

Penelitian ini meneliti tentang generalisasi dekomposisi Cholesky untuk matriks interval, yang selanjutnya generalisasi dekomposisi tersebut akan digunakan dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan matriks interval.

II. PEMBAHASAN

Bagian ini adalah akan menyajikan beberapa notasi, gagasan dan hasil dari penelitian.

2.1 Aritmatika Interval Baru

Ganesan dan Veeramani [3] mengenalkan suatu aritmatika interval baru pada $\mathbb{IR}$, kemudian Nirmala [11, 12] menggeneralisasikan aritmatika interval baru pada $\mathbb{D}$ dan menggabungkannya pada konsep dual. Untuk $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2] \in \mathbb{D}$ dan untuk $* \in \{+, -, ., \div\}$, didefinisikan $\tilde{a} * \tilde{b} = \left[m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) + k\right]$, di mana $k = min\left\{m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - \alpha, \beta - \left(m(\tilde{a}) * m(\tilde{b})\right)\right\}$, α, β adalah titik-titik akhir dari interval $\tilde{a} \odot \tilde{b}$ tertutup pada aritmatika interval yang ada [11]. Khususnya,

(i) Penjumlahan [11]:

$\tilde{a} + \tilde{b} = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = \left[\left(m(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) - k, \left(m(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) + k\right]$, di mana $k = \left\{\frac{(b_2+a_2)-(b_1+a_1)}{2}\right\}$.

(ii) Pengurangan[11]:

$\tilde{a} - \tilde{b} = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = \left[\left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) - k, \left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) + k\right]$, di mana $k = \left\{\frac{(b_2+a_2)-(b_1+a_1)}{2}\right\}$.

Jika $\tilde{a} = \tilde{b}$, yaitu jika $[a_1, a_2] = [b_1, b_2]$, maka

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \tilde{a} - dual(\tilde{a}) = [a_1, a_2] - [a_2, a_1] = [a_1 - a_1, a_2 - a_2] = [0,0]$$

(iii) Perkalian [11]:

$\tilde{a}.\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b} = [a_1, a_2][b_1, b_2] = \left[m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a})m(\tilde{b}) + k\right]$, di mana $k = min\left\{m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - \alpha, \beta - \left(m(\tilde{a})m(\tilde{b})\right)\right\}$, $\alpha = \min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$ dan $\beta = max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$.

Berikut adalah rumus umum untuk operasi perkalian pada interval [10]

Keadaan	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$
$0 \leq a_1\ dan\ 0 \leq\ b_1$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$
$a_1 < 0 < a_2\ dan\ 0 \leq\ b_1$	$a_1 \cdot b_2$	$a_2 \cdot b_2$
$a_2\ \leq 0\ dan\ 0 \leq\ b_1$	$a_1 \cdot b_2$	$a_2 \cdot b_1$
$0 \leq a_1\ dan\ b_1 < 0 < b_2$	$a_2 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$
$a_2\ \leq 0\ dan\ b_1 < 0 < b_2$	$a_1 \cdot b_2$	$a_1 \cdot b_1$
$0 \leq a_1\ dan\ b_2\ \leq 0$	$a_2 \cdot b_1$	$a_1 \cdot b_2$
$a_1 < 0 < a_2\ dan\ b_2\ \leq 0$	$a_2 \cdot b_1$	$a_1 \cdot b_1$
$a_2\ \leq 0\ dan\ b_2\ \leq 0$	$a_2 \cdot b_2$	$a_1 \cdot b_1$
$a_1 < 0 < a_2\ dan\ b_1 < 0 < b_2$	$\min\{a_1b_2, a_2b_1\}$	$\max\{a_1b_1, a_2b_2\}$

(iv) Pembagian [11]:

$1 \div \tilde{a} = \frac{1}{\tilde{a}} = \frac{1}{[a_1,a_2]} = \left[\frac{1}{m(\tilde{a})} - k, \frac{1}{m(\tilde{a})} + k\right]$, di mana

$k = min\left\{\frac{1}{a_2}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}\right), \frac{1}{a_1}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}\right)\right\}$ dan $0 \notin [a_1, a_2]$.

Jika $\tilde{a} = \tilde{b}$, yaitu jika $[a_1, a_2] = [b_1, b_2]$, maka

$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}}{dual(\tilde{a})} = [a_1, a_2].\frac{1}{[a_2,a_1]} = [a_1, a_2].\left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right] = \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}\right] = [1,1].$

Dari (iii), didapatkan $\lambda\tilde{a} = \begin{cases}[\lambda a_1, \lambda a_2], \text{untuk } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], \text{untuk } \lambda < 0\end{cases}$.

Perlu dicatat bahwa kita menggunakan $\odot$ untuk menunjukkan aritmatika interval yang ada dan * untuk menunjukkan aritmatika interval yang dimodifikasi.

(v) Akar dari suatu interval [10]

$$\sqrt{\tilde{a}} = \left[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}\right], \text{untuk } a_1 \geq 0$$

2.2 Matriks Interval [12]

Suatu matriks interval $\tilde{A}$ adalah suatu matriks yang elemen-elemennya adalah bilangan interval. Suatu matriks interval $\tilde{A}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} = (\tilde{a}_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, di mana setiap $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ atau $\tilde{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$ untuk $\underline{A}, \overline{A}$ memenuhi $\underline{A} \leq \overline{A}$. $\mathbb{D}^{m\times n}$ mendefinisikan himpunan dari semua matriks interval $(m \times n)$. Titik tengah (*mid-point*) $\tilde{A}$ didefinisikan dengan $m(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} m(\tilde{a}_{11}) & m(\tilde{a}_{12}) & \cdots & m(\tilde{a}_{1n}) \\ m(\tilde{a}_{21}) & m(\tilde{a}_{22}) & \cdots & m(\tilde{a}_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\tilde{a}_{m1}) & m(\tilde{a}_{m2}) & \cdots & m(\tilde{a}_{mn}) \end{pmatrix}$. Lebar (*widtht*) $\tilde{A}$ didefinisikan dengan $w(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & w(\tilde{a}_{12}) & \cdots & w(\tilde{a}_{1n}) \\ w(\tilde{a}_{21}) & w(\tilde{a}_{22}) & \cdots & w(\tilde{a}_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{m1}) & w(\tilde{a}_{m2}) & \cdots & w(\tilde{a}_{mn}) \end{pmatrix}$ di mana selalu tidak negatif.

Matriks Interval Null $\tilde{O}$ didefinisikan dengan $\begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \end{pmatrix}$. Matriks Interval Identitas $\tilde{I}$ didefinisikan dengan $\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{1} \end{pmatrix}$. Jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$, maka interval matriks $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan *equivalent* dan dinotasikan dengan $\tilde{A} \approx \tilde{B}$. Jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$ dan $w(\tilde{A}) = w(\tilde{B})$, maka $\tilde{A} = \tilde{B}$. Jika $m(\tilde{A}) = O$ dan $w(\tilde{A}) = O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [0,0] \end{pmatrix}$. Juga jika $m(\tilde{A}) = O$ dan $w(\tilde{A}) \neq O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \end{pmatrix} \approx \tilde{O}$. Jika $\tilde{A} \not\approx \tilde{O}$ (yaitu $\tilde{A}$ tidak equvalen dengan $\tilde{O}$), maka $\tilde{A}$ dikatakan suatu matriks interval yang tidak nol. Jika $m(\tilde{A}) = I$, maka $\tilde{A}$ dikatakan suatu matriks interval identitas. Jika $m(\tilde{A}) = I$ dan $w(\tilde{A}) = O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & [0,0] & \cdots & [1,1] \end{pmatrix}$. Juga jika $m(\tilde{A}) = I$ dan $w(\tilde{A}) \neq O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{1} \end{pmatrix} \approx \tilde{I}$.

Operasi aritmatika, determinan dan invers pada matriks interval didefinisikan dengan bilangan interval [12], jika $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{D}^{m\times n}, \tilde{x} \in \mathbb{D}^n$ dan $\tilde{\alpha} \in \mathbb{D}$, maka;

(i) $\tilde{\alpha}\tilde{A} \approx (\tilde{\alpha}\tilde{a}_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$

(ii) $\tilde{A} + \tilde{B} \approx (\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$

(iii) $\tilde{A} - \tilde{B} \approx \begin{cases} (\tilde{a}_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}, & \text{jika } \tilde{A} \not\approx \tilde{B} \\ \tilde{A} - dual(\tilde{A}) \approx O = O, & \text{jika } \tilde{A} \approx \tilde{B} \end{cases}$

(iv) $\tilde{A}\tilde{B} \approx \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\tilde{b}_{kj}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$

(v) $\tilde{A}\tilde{x} \approx \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\tilde{x}\right)_{1\le i\le m}$

(vi) Jika $\tilde{A}$ dengan order $(n \times n)$, Determinant $\tilde{A} = \det \tilde{A} = |\tilde{A}| = \sum \tilde{a}_{ij}\tilde{A}_{ij}$, di mana $\tilde{A}_{ij}$ adalah kofaktor dari $\tilde{a}_{ij}$.

Teorema 1 [11]: Jika $\tilde{A}$ adalah matriks interval segitiga atas atau segitiga bawah $n \times n$, maka$|\tilde{A}|$ ekuivalen dengan perkalian elemen-elemen matriks pada diagonal utama

Definisi 1 [12]: Suatu matriks interval persegi $\tilde{A}$ dikatakan *non-singular* atau *regular* jika $|\tilde{A}|$ *invertible* (yaitu $0 \notin |\tilde{A}|$). Kalau tidak, suatu matriks interval persegi $\tilde{A}$ dikatakan *invertible* jika $|\tilde{A}|$ adalah *invertible* (yaitu $0 \notin |\tilde{A}|$).

Definisi 2 [12]: Misalkan $\tilde{A}$ adalah suatu interval matriks. Adjoint matriks $\tilde{A}^*$ dari $\tilde{A}$ adalah transpose dari elemen kofaktor matriks dari $\tilde{A}$, yaitu $\tilde{A}^* = adj(\tilde{A}) = adj(\tilde{b}_{ij})$, di mana $\tilde{b}_{ij} = |\tilde{A}_{ji}|$, untuk $i, j = 1,2,3, \dots, n$.

Definisi 3 [12]: untuk setiap $\tilde{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, jika $|\tilde{A}|$ *invertible*, maka solusi umum dari persamaan $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{I}$ dan $\tilde{X}\tilde{A} = \tilde{I}$ dikatakan sebagai invers dari $\tilde{A}$ dan dinotasikan dengan $\tilde{A}^{-1} = \frac{adj(\tilde{A})}{|\tilde{A}|} = \frac{\tilde{A}^*}{|\tilde{A}|} = \frac{\tilde{A}^*}{dual(|\tilde{A}|)}$. Invers dinotasikan bahwa, jika $\tilde{A}$ *invertible*, maka $m(\tilde{A}^{-1}) = [m(\tilde{A})]^{-1}$.

2.3 Dekomposisi Cholesky [14]

Suatu matriks persegi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dikatakan simetri jika dan hanya jika $A^T = A$. Simetris artinya $a_{ij} = a_{ji}$ untuk $i, j = 1, 2, \dots, n$. Sedangkan suatu matriks definit positif didefinisikan suatu matriks simetri real A jika $x^T A x > 0$ untuk semua x tak nol dalam $\mathbb{R}^n$. Jika sebuah matriks A definit positif, maka matriks A mempunyai dekomposisi khusus, yang disebut Dekomposisi Cholesky. Bentuk dekomposisi Cholesky dari suatu matriks A yaitu $A = LL^T$, di mana L adalah matriks segitiga bawah dan L^T adalah transpos dari matriks L.

Teorema 2 (Kriteria Sylvester): Suatu matriks simetris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definit positif jika dan hanya jika

$$\det(A_k) > 0, k = 1, 2, \dots, n$$

dimana $A_k \in R^{k \times k}, k = 1, 2 : n$ adalah leading principal submatricessubmatrik A

Proses dekomposisi Cholesky menggunakan Elimininasi Gauss, yaitu dengan menghasilkan matriks eselon baris kemudian matriks eselon kolom berturut-turut dan berulangkali sehingga pada akhirnya akan diperoleh matriks eselon baris sekaligus eselon kolom yang berupa matriks identitas.[16]

Berikut adalah algoritma Elimininasi Gauss [4]:

Langkah 1: Jika $0 \notin pro\ \tilde{a}_{11}$, untuk $i \in [2..n]$ mengalikan pada baris pertama dengan $\frac{\tilde{a}_{i1}}{dual(\tilde{a}_{11})}$. Sehingga $\frac{\tilde{a}_{11}}{dual(\tilde{a}_{11})} = 1$ dan baris pertama memenuhi

$$\left(\tilde{a}_{i1}, \frac{\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{i1}}{dual(\tilde{a}_{11})}, \dots, \frac{\tilde{a}_{1n}\tilde{a}_{i1}}{dual(\tilde{a}_{11})}\right).$$

Langkah 2: Mengurangkan dual dari baris yang dihitung sebelumnya pada baris ke-i dari matriks $\tilde{A}$. Sehingga $\tilde{a}_{i1} - dual(\tilde{a}_{i1}) = 0$ memenuhi

$$\left(0, \tilde{a}_{i2} - \frac{dual(\tilde{a}_{12})dual(\tilde{a}_{i1})}{\tilde{a}_{11}}, \dots, \tilde{a}_{in} - \frac{dual(\tilde{a}_{1n})dual(\tilde{a}_{i1})}{\tilde{a}_{11}}\right)$$

Setelah transformasi ini diterapkan untuk setiap $i \in [2..n]$, matriks interval $\tilde{A}$ diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \tilde{0} & \tilde{a}'_{22} & \cdots & \tilde{a}'_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{0} & \tilde{a}'_{n2} & \cdots & \tilde{a}'_{nn}\end{pmatrix},\ \text{di mana } \tilde{a}'_{ij}=\tilde{a}_{ij}-\frac{dual(\tilde{a}_{1j})dual(\tilde{a}_{i1})}{\tilde{a}_{11}}.$$

Dekomposisi matriks interval $\tilde{A}$ dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan $\tilde{A}=\tilde{L}\tilde{L}^T$. Misalkan diberikan matriks interval $\tilde{A}$ definit positif dengan ordo 4×4, sehingga didapatkan hubungan sebagai berikut;

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24}\\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34}\\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] & [0,0]\\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & [0,0]\\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{41}\\ [0,0] & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{42}\\ [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{33} & \tilde{l}_{43}\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{44}\end{pmatrix}$$

Karena $\tilde{A}$ adalah adalah matriks simetris, maka persamaan di atas dapat dibentuk menjadi

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{41}\\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{42}\\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{43}\\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0]\\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] & [0,0]\\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & [0,0]\\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{41}\\ [0,0] & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{42}\\ [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{33} & \tilde{l}_{43}\\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{44}\end{pmatrix}$$

Dengan menyelesaikan persamaan $\tilde{A}=\tilde{L}\tilde{L}^T$, diperoleh

(i) $\tilde{l}_{11}\cdot\tilde{l}_{11}=\tilde{a}_{11}$

$$\tilde{l}_{11}=\sqrt{\tilde{a}_{11}}$$

(ii) $\tilde{l}_{11}\cdot\tilde{l}_{21}=\tilde{a}_{21}$

$$\tilde{l}_{21}=\frac{\tilde{a}_{21}}{dual(\tilde{l}_{11})}$$

(iii) $\tilde{l}_{11}\cdot\tilde{l}_{31}=\tilde{a}_{31}$

$$\tilde{l}_{31}=\frac{\tilde{a}_{31}}{dual(\tilde{l}_{11})}$$

(iv) $\tilde{l}_{11}\cdot\tilde{l}_{41}=\tilde{a}_{41}$

$$\tilde{l}_{41}=\frac{\tilde{a}_{41}}{dual(\tilde{l}_{11})}$$

(v) $\tilde{l}_{21}\cdot\tilde{l}_{21}+\tilde{l}_{22}\cdot\tilde{l}_{22}=\tilde{a}_{22}$

$$\tilde{l}_{22}=\sqrt{\tilde{a}_{22}-dual\left(\tilde{l}_{21}\,\tilde{l}_{21}\right)}$$

(vi) $\tilde{l}_{21}\cdot\tilde{l}_{31}+\tilde{l}_{22}\cdot\tilde{l}_{32}=\tilde{a}_{32}$

$$\tilde{l}_{32}=\frac{\tilde{a}_{32}-dual\left(\tilde{l}_{21}\tilde{l}_{31}\right)}{dual(\tilde{l}_{22})}$$

(vii) $\tilde{l}_{21}\cdot\tilde{l}_{41}+\tilde{l}_{22}\cdot\tilde{l}_{42}=\tilde{a}_{42}$

$$\tilde{l}_{42}=\frac{\tilde{a}_{42}-dual(\tilde{l}_{21}\tilde{l}_{41})}{dual(\tilde{l}_{22})}$$

(viii) $\tilde{l}_{31}\cdot\tilde{l}_{31}+\tilde{l}_{32}\cdot\tilde{l}_{32}+\tilde{l}_{33}\cdot\tilde{l}_{33}=\tilde{a}_{33}$

$$\tilde{l}_{33}=\sqrt{\tilde{a}_{33}-dual\left(\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{31}\right)-dual\left(\tilde{l}_{32}\tilde{l}_{32}\right)}$$

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

(ix) $\tilde{l}_{31} \cdot \tilde{l}_{41} + \tilde{l}_{32} \cdot \tilde{l}_{42} + \tilde{l}_{33} \cdot \tilde{l}_{43} = \tilde{a}_{34}$

$$\tilde{l}_{43} = \frac{\tilde{a}_{43} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{41}) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{l}_{42})}{dual\,(\tilde{l}_{33})}$$

(x) $\tilde{l}_{41} \cdot \tilde{l}_{41} + \tilde{l}_{42} \cdot \tilde{l}_{42} + \tilde{l}_{43} \cdot \tilde{l}_{43} + \tilde{l}_{44} \cdot \tilde{l}_{44} = \tilde{a}_{44}$

$$\tilde{l}_{44} = \sqrt{\tilde{a}_{44} - dual\,(\tilde{l}_{41}\tilde{l}_{41}) - dual\,(\tilde{l}_{42}\tilde{l}_{42}) - dual\,(\tilde{l}_{43}\tilde{l}_{43})}$$

Generalisasi dekomposisi Cholesky secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{l}_{ii} = \sqrt{\tilde{a}_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} dual\,(\tilde{l}_{ik})^2} \quad (1)$$

$$\tilde{l}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} dual\,(\tilde{l}_{jk}\tilde{l}_{ik})^2}{dual\,(\tilde{l}_{jj})}, i > j \quad (2)$$

$$\tilde{l}_{ij} = [0,0], i < j \quad (3)$$

Persamaan di atas dapat mengkonstruksi suatu generalisasi dekomposisi matriks interval $\tilde{L}\tilde{L}^T$ dari $\tilde{A}$. Konstruksi rekursif dimulai dengan baris pertama dari L dengan (1), kemudian dilanjutkan baris pertama dari $\tilde{L}^T$ menggunakan (1) dilanjutkan baris kedua dari L dengan (2). Proses ini diulang untuk rekursif $i + 1$.

2.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi Colesky

Penyelesaian suatu sistem persamaan matriks interval

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \text{dimana } \tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$$

dapat menggunakan Generalisasi Dekomposisi Cholesky, dengan menggunakan sistem matriks segitiga

$$\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b} \text{ dan}$$

$$\tilde{L}^T\tilde{x} = \tilde{y}.$$

Penyelesaian suatu sistem persamaan (5) dapat dilakukan dengan menggunakan subtitusi maju, dan sistem persamaan (6) dapat dilakukan dengan menggunakan subtitusi mundur dengan menggunakan generalisasi algoritma penyelesaian sistem persamaan linear eliminasi gauss. Berikut adalah penyelesaian sistem persamaan Generalisasi Dekomposisi Cholesky.

Misalkan diberikan matriks interval $\tilde{A}$ definit positif dengan ordo 4×4, yang dapat digeneralisasikan menjadi dekomposisi Cholesky, penyelesaian suatu sistem persamaannya didapatkan hubungan sebagai berikut;

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{L}^T\tilde{x} = \tilde{b} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & [0,0] \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{41} \\ [0,0] & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{42} \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{33} & \tilde{l}_{43} \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}(\tilde{L}^T\tilde{x}) = \tilde{L}(\tilde{y}) = \tilde{b} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & [0,0] \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{41} \\ [0,0] & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{42} \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{33} & \tilde{l}_{43} \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & [0,0] \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \end{pmatrix}$$

Dengan proses subtitusi maju, akan diperoleh $\tilde{y}$ dari persamaan (8) sebagai berikut;

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & [0,0] \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \end{pmatrix}$$

(i) $\tilde{l}_{11} \cdot \tilde{y}_1 = \tilde{b}_1$

$$\tilde{y}_1 = \frac{\tilde{b}_1}{dual(\tilde{l}_{11})}$$

(ii) $\tilde{l}_{21} \cdot \tilde{y}_1 + \tilde{l}_{22} \cdot \tilde{y}_2 = \tilde{b}_2$

$$\tilde{y}_2 = \frac{\tilde{b}_2 - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{y}_1)}{dual(\tilde{l}_{22})}$$

(iii) $\tilde{l}_{31} \cdot \tilde{y}_1 + \tilde{l}_{32} \cdot \tilde{y}_2 + \tilde{l}_{33} \cdot \tilde{y}_3 = \tilde{b}_3$

$$\tilde{y}_3 = \frac{\tilde{b}_3 - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{y}_1) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{y}_2)}{dual(\tilde{l}_{33})}$$

(iv) $\tilde{l}_{41} \cdot \tilde{y}_1 + \tilde{l}_{42} \cdot \tilde{y}_2 + \tilde{l}_{43} \cdot \tilde{y}_3 + \tilde{l}_{44} \cdot \tilde{y}_4 = \tilde{b}_4$

$$\tilde{y}_4 = \frac{\tilde{b}_4 - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{y}_1) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{y}_2) - dual(\tilde{l}_{43}\tilde{y}_3)}{dual(\tilde{l}_{44})}$$

Seperti halnya pada persamaan (8), dengan proses subtitusi mundur akan diperoleh x̃ dari persamaan (7) sebagai berikut;

$$\tilde{L}^T \tilde{x} = \tilde{y}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{41} \\ [0,0] & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{42} \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{33} & \tilde{l}_{43} \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{y}_4 \end{pmatrix}$$

(i) $\tilde{l}_{44} \cdot \tilde{x}_4 = \tilde{y}_4$

$$\tilde{x}_4 = \frac{\tilde{y}_4}{dual(\tilde{l}_{44})}$$

(ii) $\tilde{l}_{33} \cdot \tilde{x}_3 + \tilde{l}_{43} \cdot \tilde{x}_4 = \tilde{y}_3$

$$\tilde{x}_3 = \frac{\tilde{y}_3 - dual(\tilde{l}_{43}\tilde{x}_4)}{dual(\tilde{l}_{33})}$$

(iii) $\tilde{l}_{22} \cdot \tilde{x}_2 + \tilde{l}_{32} \cdot \tilde{x}_3 + \tilde{l}_{42} \cdot \tilde{x}_4 = \tilde{y}_2$

$$\tilde{x}_2 = \frac{\tilde{y}_2 - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{x}_3) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{x}_4)}{dual(\tilde{l}_{22})}$$

(iv) $\tilde{l}_{11} \cdot \tilde{x}_1 + \tilde{l}_{21} \cdot \tilde{x}_2 + \tilde{l}_{31} \cdot \tilde{x}_3 + \tilde{l}_{41} \cdot \tilde{x}_4 = \tilde{y}_1$

$$\tilde{x}_1 = \frac{\tilde{y}_1 - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{x}_2) - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{x}_3) - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{x}_4)}{dual(\tilde{l}_{11})}$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi Cholesky secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{y}_i = \frac{\tilde{b}_i - \sum_{i>j} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{y}_j)}{dual(\tilde{l}_{ii})} \text{ dan} \qquad (9)$$

$$\tilde{x}_i = \frac{\tilde{y}_i - \sum_{i<j} dual(\tilde{l}_{ji}\tilde{x}_j)}{dual(\tilde{l}_{ii})}. \quad (10)$$

III. KESIMPULAN

Kesimpulan dari hasil penelitian atau kajian yang dibahas di dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Generalisasi dekomposisi Cholesky pada generalisasi matriks interval secara umum dapat dirumuskan dengan cara:

$$\tilde{l}_{ii} = \sqrt{\tilde{a}_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} dual\,(\tilde{l}_{ik})^2},$$

$$\tilde{l}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} dual\,(\tilde{l}_{jk}\tilde{l}_{ik})^2}{dual\,(\tilde{l}_{jj})}, i > j$$

$$\tilde{l}_{ij} = [0,0], i < j$$

2. Penyelesaian sistem persamaan generalisasi matriks interval $\tilde{A}$ definit positif $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ dengan menggunakan Generalisasi Dekomposisi Cholesky diperoleh dengan $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, dimana $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{L}^T$, $\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b}$ dan $\tilde{L}^T\tilde{x} = \tilde{y}$.
Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi Cholesky secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{y}_i = \frac{\tilde{b}_i - \sum_{i>j} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{y}_j)}{dual(\tilde{l}_{ii})} \text{ dan}$$

$$\tilde{x}_i = \frac{\tilde{y}_i - \sum_{i<j} dual(\tilde{l}_{ji}\tilde{x}_j)}{dual(\tilde{l}_{ii})}.$$

IV. DAFTAR PUSTAKA

[1] Alefeld, G. and Herzberger, J. 1983. *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York (1983).

[2] Alefeld, G. and Gunter Mayer. 2000. *Interval analysis: theory and applications. Journal of Computational and Applied Mathematics*. 121 (2000) 421-464.

[3] Ganesan, K., P. Veeramani, On arithmetic operations of interval numbers, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge – Based Systems*, 13, No. 6 (2005), 619-631, doi: 10.1142/S0218488505003710.

[4] Goldsztejn, Alexandre and Chabert, Gilles. 2007. *A Generalized Interval LU Decomposition for the Solution of Interval Linear Systems.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 312-319.

[5] Hansen, E.R. and Smith, R.R. *Interval arithmetic in matrix computations*, Part 2, SIAM. journal of Numerical Analysis, 4 (1967), 1-9.

[6] Kandasamy, Vasantha and Smarandance Florentin. 2011. *Algebraic Structures* Using *Super Interval Matrices*.

[7] Kandasamy, Vasantha and Smarandance Florentin. 2010. *Interval Linear Algebra*. Glendale: Kappa & Omega.

[8] Kandasamy, Vasantha and Smarandance Florentin. 2006. *Fuzzy Interval Matrices, Neutrosophic Interval Matrices and Their Applications*. Phoenix: Hexis.

[9] Kaucher E., Interval analysis in the extended interval space IR, *Computing, Suppl.*, 2 (1980), 33-49, doi: 10.1007/978-3-7091-8577-3.

[10] Moore, Ramon E., Kearfott, Ralph Baker and Cloud, Michael J. 2009. *Introduction to interval analysis.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

[11] Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H.S., Ganesan, K. 2013. *The Determinant of An Interval Matrix Using Gaussian Elimination Method*. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 88 No. 1 2013, 15-34.

[12] Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H.S., Ganesan, K, *Inverse interval matrix: A new approach*, Applied Mathematical Sciences, 5, No. 13 (2011), 607-624.

[13] Neumaier, A. 1990. *Interval Methods for Systems of Equations.* Cambridge: Cambridge University Press.

[14] Press, William H., Teukolsky Saul A., Vetterling William T., and Flannery Brian P. 1992. *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing Second Edition*. United States of Ammerica : Cambridge University Press.

[15] Shary, Sergey P. 2001. *Interval Gauss-Seidel Method for Generalized Solution Sets to Interval Linear Systems*. Netherlands : Kluwer Academic Publishers **7:** 141–155.

[16] Wijna, Wihikan Mawi. 2009. *Dekomposisi Matriks*. Yogyakarta: wijna.web.ugm.ac.id.