# GENERALISASI METODE DEKOMPOSISI LU ( DOOLITTLE DAN CROUT ) DAN LDU UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN MATRIKS INTERVAL

**Syarif Abdullah[1], Warli[2], Edy Nurfalah[3]**

*Mahasiswa[1] Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW)Tuban*
semarganteng71@yahoo.co.id
*Dosen[2] Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW)Tuban*
warli66@gmail.com
*Dosen[3] Universitas PGRI Ronggolawe (UNIROW)Tuban*
masedy@ymail.com

**Abstrak**

Suatu matriks interval adalah suatu matriks yang elemennya adalah suatu interval tertutup. Sedangkan suatu sistem persamaan matriks interval didefinisikan sebagai $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ di mana $\tilde{A}, \tilde{x}, \tilde{b}$ terdiri dari matriks interval.
Pada penelitian ini dibahas bagaimanakah generalisasi metode dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ (Doolittle dan Crout) dan dekomposisi $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ untuk menyelesaikan sistem persamaan matriks interval.

**Kata kunci**: *Generalisasi Dekomposisi LU dan LDU, Matriks Interval dan Sistem Persamaan Matriks Interval.*

## I. PENDAHULUAN

Interval Klasik dan Matriks interval klasik yang dikenalkan oleh Hansen [8] dan Moore [17] dapat pula dilihat dalam [1, 2, 3, 9, 11, 12, 13, 18]. Artikel ini akan menggunakan generalisasi aritmatika interval $\mathbb{D}$ yang dikenalkan oleh Nirmala dkk [19, 20] dengan memperluas aritmatika interval Kauchers [14]. Operasi aritmatika ini memenuhi sifat-sifat group dengan operasi penjumlahan dan perkalian dan memenuhi relasi distributif antar interval, yangmana mempertahankan inklusi monotonic.

Misalkan $\mathbb{IR} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2]: a_1 \leq a_2, \text{dan } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan dari semua *proper intervals* dan $\overline{\mathbb{IR}} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2]: a_1 > a_2, \text{dan } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan dari semua *improper intervals* pada pada garis interval $\mathbb{R}$. Jika $a_1 = a_2 = a$, maka $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ adalah suatu bilangan real (atau suatu degenerasi interval). Titik Tengah (*mid-point*) dan setengah lebar (*half-width*) dari suatu interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ didefinisikan dengan $m(\tilde{a}) = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$ dan $w(\tilde{a}) = \left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)$. Himpunan dari generalisasi interval (*proper* dan *improper*) didefinisikan dengan $\mathbb{D} = \mathbb{IR} \cup \overline{\mathbb{IR}} = \{\tilde{a} = [a_1, a_2]: a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Himpunan dari generalisasi interval $\mathbb{D}$ adalah suatu group dengan operasi penjumlahan dan perkalian, yang mana mempertahankan inklusi monotonic.

"Dual" adalah sebuah operator monadik penting yang diusulkan oleh Kauchers [14] yang membalikkan titik akhir (*end-point*) interval dan mengungkapkan sebuah elemen ke elemen simetri antara interval yang *proper* dan *improper* di $\mathbb{D}$. Untuk $\tilde{a} = [a_1, a_2] \in \mathbb{D}$, dual didefinisikan dengan $dual(\tilde{a}) = dual[a_1, a_2] = \tilde{a} = [a_2, a_1]$. Kebalikan (*opposite*) dari suatu interval $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ adalah $opp\{[a_1, a_2]\} = [-a_1, -a_2]$ di mana adalah invers penjumlahan dari $[a_1, a_2]$ dan $\left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right]$ adalah invers perkalian dari $[a_1, a_2]$, serta $m([a_1, a_2]) = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \neq 0$. Didapatkan $\tilde{a} + (-dual\ \tilde{a}) = \tilde{a} - dual(\tilde{a}) = [a_1, a_2] - dual([a_1, a_2]) = [a_1, a_2] - [a_2, a_1] = [a_1 - a_1, a_2 - a_2] = [0,0]$, dan $\tilde{a} \times \left(\frac{1}{dual\ \tilde{a}}\right) = [a_1, a_2] \times \left(\frac{1}{dual([a_1,a_2])}\right) = [a_1, a_2] \times \left(\frac{1}{[a_2,a_1]}\right) = [a_1, a_2] \times \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right] = \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}\right] = [1,1]$. *Proper* Proyeksi didefinisikan dengan $pro[a_1, a_2] = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$, *Improper* Proyeksi didefinisikan dengan $imp[a_1, a_2] = [\max\{a, b\}, \min\{a, b\}]$.

Penelitian ini meneliti tentang generalisasi dekomposisi LU (Doolittle dan Court) dan LDU untuk matriks interval, lebih lanjut generalisasi dekomposisi tersebut akan digunakan dalam menyelesaikan suatu sisem persamaan untuk matriks interval.

## II. PEMBAHASAN

Bagian ini adalah akan menyajikan beberapa notasi, gagasan dan hasil dari penelitian.

### 2.1 Aritmatika Interval Baru

Ganesan dan Veeramani [5, 6] mengenalkan suatu aritmatika interval baru pada $\mathbb{IR}$, kemudian Nirmala [19, 20] menggeneralisasikan aritmatika interval baru pada $\mathbb{D}$ dan menggabungkannya pada konsep dual. Untuk $\tilde{a} = [a_1, a_2]$, $\tilde{b} = [b_1, b_2] \in \mathbb{D}$ dan untuk $* \in \{+, -, ., \div\}$, didefinisikan $\tilde{a} * \tilde{b} = \left[m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) + k\right]$, di mana $k = min\left\{m(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - \alpha, \beta - \left(m(\tilde{a}) * m(\tilde{b})\right)\right\}$, $\alpha, \beta$ adalah titik-titik akhir dari interval $\tilde{a} \odot \tilde{b}$ tertutup pada aritmatika interval yang ada. Khususnya,

(i) Penjumlahan:

$\tilde{a} + \tilde{b} = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = \left[\left(m(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) - k, \left(m(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) + k\right]$, di mana $k = \left\{\frac{(b_2+a_2)-(b_1+a_1)}{2}\right\}$.

(ii) Pengurangan:

$\tilde{a} - \tilde{b} = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = \left[\left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) - k, \left(m(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) + k\right]$, di mana $k = \left\{\frac{(b_2+a_2)-(b_1+a_1)}{2}\right\}$.

Jika $\tilde{a} = \tilde{b}$, yaitu jika $[a_1, a_2] = [b_1, b_2]$, maka

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \tilde{a} - dual(\tilde{a}) = [a_1, a_2] - [a_2, a_1] = [a_1 - a_1, a_2 - a_2] = [0,0]$$

(iii) Perkalian:

$\tilde{a}.\tilde{b} = \tilde{a}\tilde{b} = [a_1, a_2][b_1, b_2] = \left[m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - k, m(\tilde{a})m(\tilde{b}) + k\right]$, di mana

$k = min\{m(\tilde{a})m(\tilde{b}) - \alpha, \beta - (m(\tilde{a})m(\tilde{b}))\}$,

$\alpha = min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$ dan $\beta = max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)$.

Berikut adalah rumus umum untuk operasi perkalian pada interval [17]:

| **Keadaan** | $a_1 \cdot b_1$ | $a_2 \cdot b_2$ |
|---|---|---|
| $0 \leq a_1$ *dan* $0 \leq b_1$ | $a_1 \cdot b_1$ | $a_2 \cdot b_2$ |
| $a_1 < 0 < a_2$ *dan* $0 \leq b_1$ | $a_1 \cdot b_2$ | $a_2 \cdot b_2$ |
| $a_2 \leq 0$ *dan* $0 \leq b_1$ | $a_1 \cdot b_2$ | $a_2 \cdot b_1$ |
| $0 \leq a_1$ *dan* $b_1 < 0 < b_2$ | $a_2 \cdot b_1$ | $a_2 \cdot b_2$ |
| $a_2 \leq 0$ *dan* $b_1 < 0 < b_2$ | $a_1 \cdot b_2$ | $a_1 \cdot b_1$ |
| $0 \leq a_1$ *dan* $b_2 \leq 0$ | $a_2 \cdot b_1$ | $a_1 \cdot b_2$ |
| $a_1 < 0 < a_2$ *dan* $b_2 \leq 0$ | $a_2 \cdot b_1$ | $a_1 \cdot b_1$ |
| $a_2 \leq 0$ *dan* $b_2 \leq 0$ | $a_2 \cdot b_2$ | $a_1 \cdot b_1$ |
| $a_1 < 0 < a_2$ *dan* $b_1 < 0 < b_2$ | $\min\{a_1b_2, a_2b_1\}$ | $\max\{a_1b_1, a_2b_2\}$ |

(iv) Pembagian:

$1 \div \tilde{a} = \frac{1}{\tilde{a}} = \frac{1}{[a_1,a_2]} = \left[\frac{1}{m(\tilde{a})} - k, \frac{1}{m(\tilde{a})} + k\right]$, di mana

$k = min\left\{\frac{1}{a_2}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}\right), \frac{1}{a_1}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1+a_2}\right)\right\}$ dan $0 \notin [a_1, a_2]$.

Jika $\tilde{a} = \tilde{b}$, yaitu jika $[a_1, a_2] = [b_1, b_2]$, maka

$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}}{dual(\tilde{a})} = [a_1, a_2].\frac{1}{[a_2,a_1]} = [a_1, a_2].\left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right] = \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}\right] = [1,1]$.

Dari (iii), didapatkan $\lambda\tilde{a} = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2], \text{untuk } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], \text{untuk } \lambda < 0 \end{cases}$.

Perlu dicatat bahwa kita menggunakan $\odot$ untuk menunjukkan aritmatika interval yang ada dan * untuk menunjukkan aritmatika interval yang dimodifikasi.

## 2.2 Matriks Interval

Suatu matriks interval $\tilde{A}$ adalah suatu matriks yang elemen-elemennya adalah bilangan interval. Suatu matriks interval $\tilde{A}$ dinotasikan dengan $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, di mana setiap $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ atau $\tilde{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$ untuk $\underline{A}, \overline{A}$ memenuhi $\underline{A} \leq \overline{A}$. $\mathbb{D}^{m \times n}$ mendefinisikan himpunan dari semua matriks interval $(m \times n)$. Titik tengah (*mid-point*) $\tilde{A}$ didefinisikan dengan $m(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} m(\tilde{a}_{11}) & \cdots & m(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & m(\tilde{a}_{mn}) \end{pmatrix}$. Lebar (*widtht*) $\tilde{A}$ didefinisikan dengan

$w(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & \cdots & w(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & w(\tilde{a}_{mn}) \end{pmatrix}$ di mana selalu tidak negatif. Matriks Interval Null $\tilde{O}$ didefinisikan dengan $\begin{pmatrix} \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \end{pmatrix}$. Matriks Interval Identitas $\tilde{I}$ didefinisikan dengan $\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & & \cdots & \tilde{1} \end{pmatrix}$. Jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$, maka interval matriks $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan *equivalent* dan dinotasikan dengan $\tilde{A} \approx \tilde{B}$. Jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$ dan $w(\tilde{A}) = w(\tilde{B})$, maka $\tilde{A} = \tilde{B}$. Jika $m(\tilde{A}) = O$ dan $w(\tilde{A}) = O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} [0,0] & \cdots & [0,0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & \cdots & [0,0] \end{pmatrix}$. Juga jika $m(\tilde{A}) = O$ dan $w(\tilde{A}) \neq O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \end{pmatrix} \approx \tilde{O}$. Jika $\tilde{A} \not\approx \tilde{O}$ (yaitu $\tilde{A}$ tidak equvalen dengan $\tilde{O}$), maka $\tilde{A}$ dikatakan suatu matriks interval yang tidak nol. Jika $m(\tilde{A}) = I$, maka $\tilde{A}$ dikatakan suatu matriks interval identitas. Jika $m(\tilde{A}) = I$ dan $w(\tilde{A}) = O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & \cdots & [0,0] \\ [0,0] & [1,1] & & [0,0] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ [0,0] & & \cdots & [1,1] \end{pmatrix}$. Juga jika $m(\tilde{A}) = I$ dan $w(\tilde{A}) \neq O$, maka $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & & \tilde{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & & \cdots & \tilde{1} \end{pmatrix} \approx \tilde{I}$.

Operasi aritmatika, determinan dan invers pada matriks interval didefinisikan dengan, jika $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{D}^{m \times n}, \tilde{x} \in \mathbb{D}^n$ dan $\tilde{\alpha} \in \mathbb{D}$, maka;

1. $\tilde{\alpha}\tilde{A} \approx (\tilde{\alpha}\tilde{a}_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$
2. $\tilde{A} + \tilde{B} \approx (\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$
3. $\tilde{A} - \tilde{B} \approx \begin{cases} (\tilde{a}_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}, & \text{jika } \tilde{A} \not\approx \tilde{B} \\ \tilde{A} - dual(\tilde{A}) \approx O = O, & \text{jika } \tilde{A} \approx \tilde{B} \end{cases}$
4. $\tilde{A}\tilde{B} \approx \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\tilde{b}_{kj}\right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$
5. $\tilde{A}\tilde{x} \approx \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\tilde{x}\right)_{1 \le i \le m}$
6. Jika $\tilde{A}$ dengan order $(n \times n)$, Determinant $\tilde{A} = \det \tilde{A} = |\tilde{A}| = \sum \tilde{a}_{ij}\tilde{A}_{ij}$ , di mana $\tilde{A}_{ij}$ adalah kofaktor dari $\tilde{a}_{ij}$.

**Definisi 1** [20]: Suatu matriks interval persegi $\tilde{A}$ dikatakan *non-singular* atau *regular* jika $|\tilde{A}|$ *invertible* (yaitu $0 \notin |\tilde{A}|$). Kalau tidak, suatu matriks interval persegi $\tilde{A}$ dikatakan *invertible* jika $|\tilde{A}|$ adalah *invertible* (yaitu $0 \notin |\tilde{A}|$).

**Definisi 2** [20]: misalkan $\tilde{A}$ adalah suatu interval matriks. Adjoint matriks $\tilde{A}^*$ dari $\tilde{A}$ adalah transpose dari elemen kofaktor matriks dari $\tilde{A}$, yaitu $\tilde{A}^* = adj(\tilde{A}) = adj(\tilde{b}_{ij})$, di mana $\tilde{b}_{ij} = |\tilde{A}_{ji}|$, untuk $i, j = 1,2,3, \dots, n$.

**Definisi 3** [20]: untuk setiap $\tilde{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, jika $|\tilde{A}|$ *invertible*, maka solusi umum dari persamaan $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{I}$ dan $\tilde{X}\tilde{A} = \tilde{I}$ dikatakan sebagai invers dari $\tilde{A}$ dan dinotasikan dengan $\tilde{A}^{-1} = \frac{adj(\tilde{A})}{|\tilde{A}|} = \frac{\tilde{A}^*}{|\tilde{A}|} = \frac{\tilde{A}^*}{dual(|\tilde{A}|)}$. Invers dinotasikan bahwa, jika $\tilde{A}$ *invertible*, maka $m(\tilde{A}^{-1}) = [m(\tilde{A})]^{-1}$.

## 2.3 Dekomposisi LU (Doolittle dan Crout)

Dekomposisi $LU$ dari suatu matriks real $A$ terdiri dari perhitungan dua matriks $L$ dan $U$, di mana berturut-turut adalah matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah dan memenuhi $A = LU$ [7]. Dekomposisi tersebut memudahkan solusi dari banyak masalah seperti memecahkan persamaan linear, pembalik matriks, dll. Metode untuk mendapatkan dekomposisi $LU$ yang sering digunakan adalah dekomposisi Doolittle dan Crout.

### 2.3.1 Dekomposisi LU Doolittle

Dekomposisi $LU$ Doolittle mengisyaratkan bahwa elemen dari diagonal $L$ semuanya bernilai 1 dan elemen diagonal $U$ taknol [7, 15]. Sebelum membangun generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Doolittle akan diperkenalkan terlebih dahulu suatu Generalisasi Algoritma Eliminasi Gauss [4] untuk generalisasi matriks interval dari Algoritma Eliminasi Gauss [16], di mana dari hasil eliminasi tersebut digunakan untuk membangun generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Doolittle. Langkah-langkah Generalisasi Algoritma Eliminasi Gauss adalah sebagai berikut:

**Langkah 1:** Jika $0 \notin pro\ \tilde{a}_{11}$, untuk $i \in [2..n]$ mengalikan pada baris pertama dengan $\frac{\tilde{a}_{i1}}{dual(\tilde{a}_{11})}$. Sehingga $\frac{\tilde{a}_{11}}{dual(\tilde{a}_{11})} = 1$ dan baris pertama memenuhi

$$\left(\tilde{a}_{i1}, \frac{\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{i1}}{dual(\tilde{a}_{11})}, \dots, \frac{\tilde{a}_{1n}\tilde{a}_{i1}}{dual(\tilde{a}_{11})}\right).$$

**Langkah 2:** Mengurangkan dual dari baris yang dihitung sebelumnya pada baris ke-$i$ dari matriks $\tilde{A}$. Sehingga $\tilde{a}_{i1} - dual(\tilde{a}_{i1}) = 0$ memenuhi

$$\left(0, \tilde{a}_{i2} - \frac{dual(\tilde{a}_{12})dual(\tilde{a}_{i1})}{\tilde{a}_{11}}, \dots, \tilde{a}_{in} - \frac{dual(\tilde{a}_{1n})dual(\tilde{a}_{i1})}{\tilde{a}_{11}}\right)$$

Setelah transformasi ini diterapkan untuk setiap $i \in [2..n]$, matriks interval $\tilde{A}$ diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{0} & \tilde{a}'_{22} & \cdots & \tilde{a}'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{a}'_{n2} & \cdots & \tilde{a}'_{nn} \end{pmatrix}, \text{ di mana } \tilde{a}'_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \frac{dual(\tilde{a}_{1j})dual(\tilde{a}_{i1})}{\tilde{a}_{11}}.$$

Matrik $\tilde{L}$ dan $\tilde{U}$ dicari dengan menyelesaikan persamaan $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$. Misalkan diberikan matriks interval $\tilde{A}$ dengan ordo $4 \times 4$, sehingga didapatkan hubungan sebagai berikut;

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} & \tilde{u}_{14} \\ [0,0] & \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{u}_{33} & \tilde{u}_{34} \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \tilde{u}_{44} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_{11} = \tilde{a}_{11},\ \tilde{u}_{12} = \tilde{a}_{12}, \quad \tilde{u}_{13} = \tilde{a}_{13}, \quad \tilde{u}_{14} = \tilde{a}_{14}$$

$$\tilde{l}_{21} = \frac{\tilde{a}_{21}}{dual(\tilde{u}_{11})}$$

$$\tilde{u}_{22} = \tilde{a}_{22} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{u}_{12})$$

$$\tilde{u}_{23} = \tilde{a}_{23} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{u}_{13})$$

$$\tilde{u}_{24} = \tilde{a}_{24} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{u}_{14})$$

$$\tilde{l}_{31} = \frac{\tilde{a}_{31}}{dual(\tilde{u}_{11})}$$

$$\tilde{l}_{32} = \frac{\tilde{a}_{32} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{u}_{12})}{dual(\tilde{u}_{22})}$$

$$\tilde{u}_{33} = \tilde{a}_{33} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{u}_{13}) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{u}_{23})$$

$$\tilde{u}_{34} = \tilde{a}_{34} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{u}_{14}) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{u}_{24})$$

$$\tilde{l}_{41} = \frac{\tilde{a}_{41}}{dual(\tilde{u}_{11})}$$

$$\tilde{l}_{42} = \frac{\tilde{a}_{42} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{u}_{12})}{dual(\tilde{u}_{22})}$$

$$\tilde{l}_{43} = \frac{\tilde{a}_{43} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{u}_{13}) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{u}_{23})}{dual(\tilde{u}_{33})}$$

$$\tilde{u}_{44} = \tilde{a}_{44} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{u}_{14}) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{u}_{24}) - dual(\tilde{l}_{43}\tilde{u}_{34})$$

Generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Doolittle secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$\tilde{l}_{ii} = [1,1]$ dan $\tilde{l}_{ij} = [0,0]$, untuk $i < j$ ; (1)

$\tilde{l}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<j} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{u}_{jj})}$, untuk $j < i$ ; (2)

$\tilde{u}_{ij} = [0,0]$ , untuk $i > j$ ; (3)

$\tilde{u}_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj})$, untuk $i \le j$. (4)

Persamaan sebelumnya memungkinkan mengkonstruksi suatu generalisasi dekomposisi interval $\tilde{L}\tilde{U}$ dari $\tilde{A}$: konstruksi rekursif dimulai dengan baris pertama dari $\tilde{U}$ yang mudah dihitung dengan menggunakan (4). Hal ini sama dengan baris pertama dari $\tilde{A}$. Kemudian, asalkan $[0,0] \notin pro\, \tilde{u}_{ii}$, kolom ke-$i$ dari $\tilde{L}$ menggunakan (2) dan baris ke-$i$ dari $\tilde{U}$ dibangun menggunakan (4). Proses ini diulang untuk rekursif $i + 1$.

**Proposisi 1 :** Misalkan $\tilde{A} \in \mathbb{D}^{n\times n}$ adalah suatu generalisasi interval matriks. Diberikan generalisasi matriks interval $\tilde{L}$ dan $\tilde{U}$ yang didefinisikan oleh (1-4) dapat dikonstruksi, maka memenuhi $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$.

Bukti: Pandang $i, j \in [1 \dots n]$ sehingga $i \le j$. Kemudian dengan persamaan (4)

$$\tilde{u}_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \textstyle\sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj}).$$

ISBN: 978-602-70609-0-6
Tuban, 24 Mei 2014

Penjumlahan $\sum_{k<i} \tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj}$ pada setiap sisi dari persamaan, $\tilde{u}_{ij} + \sum_{k<i} \tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj} = \tilde{a}_{ij}$. Sebagaimana $\tilde{l}_{jj} = [1,1]$ dan $\tilde{l}_{ik} = [0,0]$ untuk $i < k$, $\sum_{k\in[1\ldots n]} \tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj} = \tilde{a}_{ij}$. Mengingat persamaan (2) didapatkan hal yang sama dalam kasus $i,j \in [1 \ldots n]$ dengan $i > j$.□

### 2.3.1 Dekomposisi LU Crout

Dekomposisi $LU$ Crout mensyaratkan bahwa elemen dari diagonal $L$ semuanya bernilai taknol dan elemen diagonal $U$ bernilai 1. Pada bagian ini, akan dibahas generalisasi metode Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Crout untuk matriks interval. Matrik $\tilde{L}$ dan $\tilde{U}$ dicari dengan menyelesaikan persamaan $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$. Sama halnya pada bagian sebelumnya, misalkan diberikan matriks interval $\tilde{A}$ dengan ordo $4 \times 4$, sehingga didapatkan hubungan sebagai berikut;

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} & [0,0] \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & \tilde{l}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} & \tilde{u}_{14} \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{34} \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$\tilde{l}_{11} = \tilde{a}_{11}, \quad \tilde{l}_{21} = \tilde{a}_{21}, \quad \tilde{l}_{31} = \tilde{a}_{31}, \quad \tilde{l}_{41} = \tilde{a}_{41}$$

$$\tilde{u}_{12} = \frac{\tilde{a}_{12}}{dual(\tilde{l}_{11})}, \quad \tilde{u}_{13} = \frac{\tilde{a}_{13}}{dual(\tilde{l}_{11})}, \quad \tilde{u}_{14} = \frac{\tilde{a}_{14}}{dual(\tilde{l}_{11})}$$

$$\tilde{l}_{22} = \tilde{a}_{22} - dual\left(\tilde{l}_{21}\tilde{u}_{12}\right)$$

$$\tilde{l}_{32} = \tilde{a}_{32} - dual\left(\tilde{l}_{31}\tilde{u}_{12}\right),$$

$$\tilde{l}_{42} = \tilde{a}_{42} - dual\left(\tilde{l}_{41}\tilde{u}_{12}\right)$$

$$\tilde{u}_{23} = \frac{\tilde{a}_{23} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{u}_{13})}{dual(\tilde{l}_{22})}$$

$$\tilde{u}_{24} = \frac{\tilde{a}_{24} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{u}_{14})}{dual(\tilde{l}_{22})}$$

$$\tilde{l}_{33} = \tilde{a}_{33} - dual\left(\tilde{l}_{31}\tilde{u}_{13}\right) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{u}_{23})$$

$$\tilde{l}_{43} = \tilde{a}_{43} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{u}_{13}) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{u}_{23})$$

$$\tilde{u}_{34} = \frac{\tilde{a}_{34} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{u}_{14}) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{u}_{24})}{dual(\tilde{l}_{33})}$$

$$\tilde{l}_{44} = \tilde{a}_{44} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{u}_{14}) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{u}_{24}), -dual(\tilde{l}_{43}\tilde{u}_{34})$$

Generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Crout secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{u}_{ii} = [1,1] \text{ dan } \tilde{u}_{ij} = [0,0], \text{ untuk } i > j\,; \tag{5}$$

$$\tilde{u}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{l}_{ii})}, \text{ untuk } i < j; \tag{6}$$

$$\tilde{l}_{ij} = [0,0]\ , \text{ untuk } i < j\,; \tag{7}$$

$$\tilde{l}_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \sum_{k<j} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj}), \text{ untuk } j \le i. \tag{8}$$

Persamaan sebelumnya memungkinkan mengkonstruksi suatu generalisasi dekomposisi interval $\tilde{L}\tilde{U}$ dari $\tilde{A}$: konstruksi rekursif dimulai dengan kolom pertama dari $\tilde{L}$ yang mudah dihitung dengan menggunakan (8). Hal ini sama dengan kolom pertama dari $\tilde{A}$. Kemudian, asalkan $[0,0] \notin pro\ \tilde{l}_{ii}$, baris ke-$i$ dari $\tilde{u}$ menggunakan (6) dan kolom ke-$i$ dari $\tilde{L}$ dibangun menggunakan (8). Proses ini diulang untuk rekursif $i+1$.

## 2.4 Dekomposisi LDU

Dekomposisi $LDU$ dari suatu matriks real $A$ terdiri dari perhitungan tiga matriks $L, D$ dan $U$, di mana berturut-turut adalah matriks segitiga atas dengan diagonal utama bernilai 1, matriks diagonal dan matriks segitiga bawah dengan diagonal utama bernilai 1 dan memenuhi $A = LDU$ [10]. Metode untuk mengeneralisasikan matriks interval $\tilde{A}$ menjadi bentuk $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ akan digunakan pengembangan dari metode generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Doolittle kemudian dilakukan aturan pada metode generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Crout. Adapun langkahnya adalah sebagai berikut;

Misalkan diberikan matriks interval $\tilde{A}$ dengan ordo $4 \times 4$, sehingga didapatkan hubungan $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ sebagai berikut;

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{41} & \tilde{l}_{42} & \tilde{l}_{43} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & [0,0] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & \tilde{d}_{22} & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{d}_{33} & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & \tilde{d}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} & \tilde{u}_{14} \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} & \tilde{u}_{24} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{34} \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix}$$

$$\tilde{d}_{11} = \tilde{a}_{11}, \ \tilde{u}_{12} = \frac{\tilde{a}_{12}}{dual(\tilde{d}_{11})}, \qquad \tilde{u}_{13} = \frac{\tilde{a}_{13}}{dual(\tilde{d}_{11})}, \qquad \tilde{u}_{14} = \frac{\tilde{a}_{14}}{dual(\tilde{d}_{11})}$$

$$\tilde{l}_{21} = \frac{\tilde{a}_{21}}{dual(\tilde{d}_{11})}$$

$$\tilde{d}_{22} = \tilde{a}_{22} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{12})$$

$$\tilde{u}_{23} = \frac{\tilde{a}_{23} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{13})}{dual(\tilde{d}_{22})}$$

$$\tilde{u}_{24} = \frac{\tilde{a}_{24} - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{14})}{dual(\tilde{d}_{22})}$$

$$\tilde{l}_{31} = \frac{\tilde{a}_{31}}{dual(\tilde{d}_{11})}$$

$$\tilde{l}_{32} = \frac{\tilde{a}_{32} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{12})}{dual(\tilde{d}_{22})}$$

$$\tilde{d}_{33} = \tilde{a}_{33} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{13}) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{d}_{22}\tilde{u}_{23})$$

$$\tilde{u}_{34} = \tilde{a}_{34} - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{14}) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{d}_{22}\tilde{u}_{24})$$

$$\tilde{l}_{41} = \frac{\tilde{a}_{41}}{dual(\tilde{d}_{11})}$$

$$\tilde{l}_{42} = \frac{\tilde{a}_{42} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{12})}{dual(\tilde{d}_{22})}$$

$$\tilde{l}_{43} = \frac{\tilde{a}_{43} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{13}) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{d}_{22}\tilde{u}_{23})}{dual(\tilde{d}_{33})}$$

$$\tilde{d}_{44} = \tilde{a}_{44} - dual(\tilde{l}_{41}\tilde{d}_{11}\tilde{u}_{14}) - dual(\tilde{l}_{42}\tilde{d}_{22}\tilde{u}_{24}) - dual(\tilde{l}_{43}\tilde{d}_{33}\tilde{u}_{34})$$

Generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{u}_{ii} = [1,1] \text{ dan } \tilde{u}_{ij} = [0,0], \text{ untuk } i > j\,; \tag{9}$$

$$\tilde{u}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{d}_{kk}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{d}_{ii})}, \text{ untuk } i < j; \tag{10}$$

$$\tilde{d}_{ij} = [0,0], \text{ untuk } i \neq j\,; \tag{11}$$

$$\tilde{d}_{ii} = \tilde{a}_{ii} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{d}_{kk}\tilde{u}_{ki}), \text{ untuk } j = i. \tag{12}$$

$$\tilde{l}_{ii} = [1,1] \text{ dan } \tilde{l}_{ij} = [0,0], \text{ untuk } i < j\,; \tag{13}$$

$$\tilde{l}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<j} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{d}_{kk}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{d}_{jj})}, \text{ untuk } j < i. \tag{14}$$

Persamaan sebelumnya memungkinkan mengkonstruksi suatu generalisasi dekomposisi interval $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ dari $\tilde{A}$: konstruksi rekursif dimulai dengan diagonal $\tilde{d}_{11}$ dari $\tilde{D}$ yang sama dengan $\tilde{a}_{11}$ dari $\tilde{A}$ menggunakan (12). Baris pertama dari $\tilde{U}$ yang mudah dihitung dengan menggunakan (10). Kemudian baris kedua dari $\tilde{L}$ yang mudah dihitung dengan menggunakan (14). Kemudian diagonal kedua dari $\tilde{D}$ yang mudah dihitung dengan menggunakan (12) Baris kedua dari $\tilde{U}$ yang mudah dihitung dengan menggunakan (10). Proses ini diulang untuk rekursif $i + 1$.

## 2.5 Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi LU

Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ (Doolittle dan Crout) dapat menyelesaikan suatu sistem persamaan,

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \tag{15}$$

yaitu dengan menggunakan sistem matriks segitiga

$$\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b} \text{ dan} \tag{16}$$

$$\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{y}. \tag{17}$$

Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ (Doolittle dan Crout) pada (16) dapat dilakukan dengan menggunakan subtitusi maju, dan (17) dapat dilakukan dengan menggunakan subtitusi mundur dengan menggunakan generalisasi algoritma penyelesaian sistem persamaan linear eliminasi gauss. Berikut akan disajikan penyelesaian sistem persamaan Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ (Doolittle dan Crout);

Misalkan diberikan matriks interval $\tilde{A}$ dengan ordo $3 \times 3$ yang dapat digeneralisasikan menjadi dekomposisi Doolittle, sehingga didapatkan hubungan dalam penyelesaian suatu sistem persamaan sebagai berikut;

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{b} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{u}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b} \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{u}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

Karena $\tilde{L}$ adalah matriks interval segitiga bawah (16), maka (19) didapatkan $\tilde{y}$ dengan proses subtitusi maju;

$$\tilde{y}_1 = \tilde{b}_1;\ \tilde{y}_2 = \tilde{b}_2 - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{y}_1);\ \tilde{y}_3 = \tilde{b}_3 - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{y}_1) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{y}_2)$$

Karena $\tilde{U}$ adalah matriks interval segitiga atas (17), maka (18) didapatkan $\tilde{x}$ dengan proses subtitusi mundur;

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{u}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{\tilde{y}_3}{dual(\tilde{u}_{33})};\ \tilde{x}_2 = \frac{\tilde{y}_2 - dual(\tilde{u}_{23}\tilde{x}_3)}{dual(\tilde{u}_{22})};\ \tilde{x}_1 = \frac{\tilde{y}_1 - dual(\tilde{u}_{12}\tilde{x}_2) - dual(\tilde{u}_{13}\tilde{x}_3)}{dual(\tilde{u}_{11})}$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Doolittle secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{y}_i = \tilde{b}_i - \textstyle\sum_{j<i} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{y}_j) \text{ dan} \qquad (20)$$

$$\tilde{x}_i = \frac{\tilde{y}_i - \sum_{j>i} dual(\tilde{u}_{ij}\tilde{x}_j)}{dual(\tilde{u}_{ii})}. \qquad (21)$$

Misalkan diberikan matriks interval $\tilde{A}$ dengan ordo $3 \times 3$ yang dapat digeneralisasikan menjadi dekomposisi Crout, sehingga didapatkan hubungan dalam penyelesaian suatu sistem persamaan sebagai berikut;

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{b} \qquad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b} \qquad (23)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

Karena $\tilde{L}$ adalah matriks interval segitiga bawah (16), maka (23) didapatkan $\tilde{y}$ dengan proses subtitusi maju;

$$\tilde{y}_1 = \frac{\tilde{b}_1}{dual(\tilde{l}_{11})};\ \tilde{y}_2 = \frac{\tilde{b}_2 - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{y}_1)}{dual(\tilde{l}_{22})};\ \tilde{y}_3 = \frac{\tilde{b}_3 - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{y}_1) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{y}_2)}{dual(\tilde{l}_{22})}$$

Karena $\tilde{U}$ adalah matriks interval segitiga atas (17), maka (22) didapatkan $\tilde{x}$ dengan proses subtitusi mundur;

$$\begin{pmatrix} [1,1] & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_3 = \tilde{y}_3;\ \tilde{x}_2 = \tilde{y}_2 - dual(\tilde{u}_{23}\tilde{x}_3);\ \tilde{x}_1 = \tilde{y}_1 - dual(\tilde{u}_{12}\tilde{x}_2) - dual(\tilde{u}_{13}\tilde{x}_3)$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Crout secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{y}_i = \frac{\tilde{b}_i - \sum_{j<i} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{y}_j)}{dual(\tilde{l}_{ii})} \text{ dan} \quad (24)$$

$$\tilde{x}_i = \tilde{y}_i - \sum_{j>i} dual(\tilde{u}_{ij}\tilde{x}_j). \quad (25)$$

## 2.6 Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi LDU

Seperti pada bagian sebelumnya, apabila diberikan suatu matriks interval $\tilde{A}$ yang dapat digeneralisasikan menjadi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$, sehingga didapatkan hubungan dalam penyelesaian suatu sistem persamaan sebagai berikut;

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{b} \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & \tilde{d}_{22} & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1,1] & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{y} = \tilde{b} \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & \tilde{d}_{22} & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}\tilde{D}\tilde{y} = \tilde{L}\tilde{z} = \tilde{b} \quad (28)$$

$$\begin{pmatrix} [1,1] & [0,0] & [0,0] \\ \tilde{l}_{21} & [1,1] & [0,0] \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$$

Karena $\tilde{L}$ adalah matriks interval segitiga bawah (26), maka didapatkan $\tilde{z}$ dengan proses subtitusi maju;

$$\tilde{z}_1 = \tilde{b}_1; \;\; \tilde{z}_2 = \tilde{b}_2 - dual(\tilde{l}_{21}\tilde{z}_1); \;\; \tilde{z}_3 = \tilde{b}_3 - dual(\tilde{l}_{31}\tilde{z}_1) - dual(\tilde{l}_{32}\tilde{z}_2)$$

Karena $\tilde{D}$ adalah matriks diagonal (27), maka didapatkan $\tilde{y}$ dengan proses subtitusi maju atau mundur;

$$\tilde{D}\tilde{y} = \tilde{z} \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & \tilde{d}_{22} & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{\tilde{z}_1}{dual(\tilde{d}_{11})}; \;\; \tilde{y}_2 = \frac{\tilde{z}_2}{dual(\tilde{d}_{22})}; \;\; \tilde{y}_3 = \frac{\tilde{z}_3}{dual(\tilde{d}_{33})}$$

Karena $\tilde{U}$ adalah matriks interval segitiga atas (28), maka didapatkan $\tilde{x}$ dengan proses subtitusi mundur;

$$\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{y} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} [1,1] & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ [0,0] & [1,1] & \tilde{u}_{23} \\ [0,0] & [0,0] & [1,1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_3 = \tilde{y}_3; \;\; \tilde{x}_2 = \tilde{y}_2 - dual(\tilde{u}_{23}\tilde{x}_3); \;\; \tilde{x}_1 = \tilde{y}_1 - dual(\tilde{u}_{12}\tilde{x}_2) - dual(\tilde{u}_{13}\tilde{x}_3)$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ secara umum dapat dirumuskan dengan cara sebagai berikut:

$$\tilde{z}_i = \tilde{b}_i - \sum_{j<i} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{z}_j) \quad (31)$$

$$\tilde{y}_i = \frac{\tilde{z}_i}{dual(\tilde{d}_{ii})} \text{ dan} \quad (32)$$

$$\tilde{x}_i = \tilde{y}_i - \sum_{j>i} dual(\tilde{u}_{ij}\tilde{x}_j). \quad (33)$$

## III. KESIMPULAN

Kesimpulan dari hasil penelitian atau kajian yang dibahas di dalam penilitian ini adalah sebagai berikut:

1. Generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Doolittle pada generalisasi matriks interval secara umum dapat dirumuskan dengan cara:$\tilde{l}_{ii} = [1,1]$ dan $\tilde{l}_{ij} = [0,0]$, untuk $i < j$ ; $\tilde{l}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<j} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{u}_{jj})}$, untuk $j < i$ ; $\tilde{u}_{ij} = [0,0]$ , untuk $i > j$ ; $\tilde{u}_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj})$, untuk $i \leq j$.
2. Generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Crout pada generalisasi matriks interval secara umum dapat dirumuskan dengan cara: $\tilde{u}_{ii} = [1,1]$ dan $\tilde{u}_{ij} = [0,0]$, untuk $i > j$ ; $\tilde{u}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{l}_{ii})}$, untuk $i < j$; $\tilde{l}_{ij} = [0,0]$ , untuk $i < j$ ; $\tilde{l}_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \sum_{k<j} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{u}_{kj})$, untuk $j \leq i$.
3. Generalisasi dekomposisi $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ pada generalisasi matriks interval secara umum dapat dirumuskan dengan cara: $\tilde{u}_{ii} = [1,1]$ dan $\tilde{u}_{ij} = [0,0]$, untuk $i > j$ ; $\tilde{u}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{d}_{kk}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{d}_{ii})}$, untuk $i < j$; $\tilde{d}_{ij} = [0,0]$, untuk $i \neq j$ ; $\tilde{d}_{ii} = \tilde{a}_{ii} - \sum_{k<i} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{d}_{kk}\tilde{u}_{ki})$, untuk $j = i$; $\tilde{l}_{ii} = [1,1]$ dan $\tilde{l}_{ij} = [0,0]$, untuk $i < j$ ; $\tilde{l}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - \sum_{k<j} dual(\tilde{l}_{ik}\tilde{d}_{kk}\tilde{u}_{kj})}{dual(\tilde{d}_{jj})}$, untuk $j < i$.
4. Penyelesaian sistem persamaan generalisasi matriks interval $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, dapat digunakan Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ (Doolittle dan Crout) yaitu $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{b}$ , $\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{b}$. Secara umum Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Doolittle untuk menyelesaian sistem persamaan generalisasi matriks interval dapat dirumuskan dengan cara: $\tilde{y}_i = \tilde{b}_i - \sum_{j<i} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{y}_j)$; $\tilde{x}_i = \frac{\tilde{y}_i - \sum_{j>i} dual(\tilde{u}_{ij}\tilde{x}_j)}{dual(\tilde{u}_{ii})}$, dan secara umum Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{U}$ Crout untuk menyelesaian sistem persamaan generalisasi matriks interval dapat dirumuskan dengan cara: $\tilde{y}_i = \frac{\tilde{b}_i - \sum_{j<i} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{y}_j)}{dual(\tilde{l}_{ii})}$ dan $\tilde{x}_i = \tilde{y}_i - \sum_{j>i} dual(\tilde{u}_{ij}\tilde{x}_j)$.
5. Penyelesaian sistem persamaan generalisasi matriks interval $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, dapat pula digunakan Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ yaitu $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{b}$, $\tilde{L}\tilde{z} = \tilde{b}, \tilde{D}\tilde{y} = \tilde{z}$ dan $\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{y}$. Secara umum Generalisasi Dekomposisi $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{U}$ untuk menyelesaian sistem persamaan generalisasi matriks interval dapat dirumuskan dengan cara: $\tilde{z}_i = \tilde{b}_i - \sum_{j<i} dual(\tilde{l}_{ij}\tilde{z}_j)$; $\tilde{y}_i = \frac{\tilde{z}_i}{dual(\tilde{d}_{ii})}$ dan $\tilde{x}_i = \tilde{y}_i - \sum_{j>i} dual(\tilde{u}_{ij}\tilde{x}_j)$.

## IV. DAFTAR PUSTAKA


[1] Alefeld, G. and Herzberger, J. 1983. *Introduction to Interval Computations*. New York : Academic Press.

[2] Alefeld, G. and Gunter Mayer. 2000. *Interval analysis: theory and applications. Journal of Computational and Applied Mathematics*. 121 (2000) 421-464.

[3] Chen, Guanrong and Pham, Trung T. 2001. *Introduction to Fuzzy Sets*, *Fuzzy* Logic, *And* Fuzzy *Control Systems*. United States of America: CRC Press LLC.

[4] Goldsztejn, Alexandre and Chabert, Gilles. 2007. *A Generalized Interval LU Decomposition for the Solution of Interval Linear Systems.* Germain: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 312-319.

[5] Ganesan, K. and Veeramani, P. *On Arithmetic Operations of Interval Numbers*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems, 13 (6) (2005), 619 - 631.

[6] Ganesan, K. *On Some Properties of Interval Matrices*, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 1 (2) (2007), 92-99.

[7] Golub, Gane H., and Loan Charles F. Van. 1996. *Matrix Computation Third Edition*. United States of America: The Johns Hopkins University Press.

[8] Hansen, E.R. and Smith, R.R. *Interval arithmetic in matrix computations*, Part 2, SIAM. journal of Numerical Analysis, 4 (1967), 1-9.

[9] Hargreaves, Gareth I. 2002. *Interval Analysis in Matlab*. England: University of Manchester.

[10] Harville, David A. 1997. *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. New York : Springer-Verlag, Inc.

[11] Kandasamy, Vasantha and Smarandance, Florentin. 2011. *Algebraic Structures* Using *Super Interval Matrices*.

[12] Kandasamy, Vasantha and Smarandance, Florentin. 2006. *Fuzzy Interval Matrices, Neutrosophic Interval Matrices and Their Applications*. Phoenix: Hexis.

[13] Kandasamy, Vasantha and Smarandance, Florentin. 2010. *Interval Linear Algebra*. Glendale: Kappa & Omega.

[14] Kaucher, E. *Interval Analysis in the Extended Interval Space* $\mathbb{IR}$. Computing, Suppl. 2 (1980), 33 - 49.

[15] Lay, David C. 2006. *Linear Algebra and Its Applications Third Edition Update*. United States of America: Pearson Education, Inc.

[16] Meyer, Carl D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

[17] Moore, Ramon E., Kearfott, Ralph Baker and Cloud, Michael J. 2009. *Introduction to interval analysis.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

[18] Neumaier, A. 1990. *Interval Methods for Systems of Equations.* United States of America: Cambridge University Press.

[19] Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H.S., Ganesan, K. 2013. *The Determinant of An Interval Matrix Using Gaussian Elimination Method*. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 88 No. 1 2013, 15-34.

[20] Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H.S., Ganesan, K, *Inverse interval matrix: A new approach*, Applied Mathematical Sciences, 5, No. 13 (2011), 607-624.