

PENGARUH WAKTU TUNDA PADA MODEL PERTUMBUHAN POPULASI LOGISTIK

Agus Suryanto* dan Isnani Darti
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya
Jl. Veteran Malang 65145
**email: suryanto@ub.ac.id*

Abstrak

Model pertumbuhan populasi logistik merupakan model pertumbuhan populasi satu spesies yang mempertimbangan daya dukung lingkungan yang terbatas. Pada artikel ini dikaji pengaruh waktu tunda pada model pertumbuhan logistik, baik waktu tunda diskret maupun waktu tunda terdistribusi. Waktu tunda dalam hal ini dapat diinterpretasikan sebagai waktu tunda reproduksi akibat proses pendewasaan, waktu pembentukan telur hingga menetas, dan sebagainya. Secara khusus akan dikaji pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik tetap yang ada. Kestabilan titik tetap ditentukan dengan terlebih dahulu melakukan linearisasi persamaan di sekitar titik tetap tersebut, dan selanjutnya menyelidiki distribusi nilai eigen dari matriks Jacobi sistem linear yang didapatkan. Hasil analisis menunjukkan bahwa waktu tunda diskret dapat mengakibatkan perubahan kestabilan titik tetap positif dan munculnya solusi periodik. Dengan kalimat lain, waktu tunda diskret dapat menyebabkan adanya bifurkasi Hopf di titik tetap positif. Di lain pihak, model logistik dengan waktu tunda terdistribusi mempunyai perilaku dinamik yang sama dengan model pertumbuhan logistik tanpa waktu tunda. Gabungan waktu tunda diskret dan terdistribusi pada model logistik mengakibatkan dinamika yang lebih kompleks.

1. Pendahuluan

Populasi adalah kumpulan individu dari suatu spesies tertentu secara bersama dalam suatu area tertentu dan melakukan proses berkembang biak (Sarkar dan Plutynski, 2008). Jumlah individu dalam suatu populasi berubah seiring waktu karena kelahiran, kematian, emigrasi, imigrasi dan beberapa faktor luar. Perubahan jumlah individu dalam suatu populasi disebut sebagai pertumbuhan populasi. Kemampuan untuk memprediksi jumlah individu dari suatu populasi sangat berkaitan dengan berbagai bidang, seperti ekologi, epidemiologi, imunologi, bioproses dan sebagainya. Salah satu manfaatnya adalah untuk melakukan pengendalian terhadap populasi, misalnya untuk mencegah kepunahan suatu spesies, optimasi pemanenan, pengendalian hama, pengendalian penyebaran penyakit (epidemi), optimasi proses fermentasi dan sebagainya. Model matematika pertumbuhan populasi merupakan salah satu metode untuk mempelajari dinamika pertumbuhan populasi. Pertumbuhan populasi secara matematika seringkali dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial tersebut menyatakan laju perubahan jumlah populasi dari waktu ke waktu yang proporsional dengan tingkat pertumbuhan dikalikan dengan jumlah populasi saat ini. Secara umum laju pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh kondisi lingkungan, laju kelahiran, laju kematian, predasi, persaingan, imigrasi dan emigrasi (Murray, 2002; Smith, 2011). Dalam artikel ini akan diulas model pertumbuhan populasi satu spesies. Model populasi satu spesies tersebut dapat digunakan sebagai dasar untuk pengembangan model multi-spesies seperti model predator-prey, model epidemi, model interaksi antara sistem imun,

sel tumor dan pengobatan (kemoterapi), model fermentasi dan sebagainya. Model pertumbuhan populasi satu spesies yang paling sederhana adalah pertumbuhan Malthus atau pertumbuhan eksponensial. Model pertumbuhan Malthus dapat memberikan pendekatan yang cukup bagus pada saat awal pertumbuhan, yaitu ketika populasi berkembang secara eksponensial. Tetapi model tersebut menyatakan bahwa populasi terus tumbuh secara eksponensial tanpa batas sehingga sangat tidak sesuai dengan realitas yang ada, yaitu pertumbuhan populasi selalu dibatasi oleh sumber daya lingkungan yang terbatas. Untuk mengatasi hal tersebut, Verhulst menambahkan pengaruh kepadatan populasi atau kompetisi antar individu ke dalam model Malthus sehingga diperoleh model pertumbuhan logistik. Model logistik telah banyak diaplikasikan untuk memodelkan pertumbuhan populasi dari berbagai macam sistem biologi (Murray, 2002; Smith, 2011).

Pada model logistik diasumsikan bahwa kepadatan populasi berpengaruh negatif terhadap laju pertumbuhan secara instan. Pada kenyataannya laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada saat sekarang tetapi juga bergantung pada jumlah populasi sebelumnya, sehingga perlu melibatkan waktu tunda. Waktu tunda mungkin bersifat diskret yaitu bahwa laju pertumbuhan saat sekarang diasumsikan bergantung kepada jumlah populasi pada jangka waktu tertentu (dan konstan) di masa lalu. Selain itu, kebergantungan laju pertumbuhan populasi saat sekarang mungkin saja terdistribusi dalam suatu interval pada masa lalu yang dikenal sebagai waktu tunda terdistribusi (Kuang, 1993; Murray, 2002; Ruan, 2006; Smith 2011). Dalam artikel ini akan dibahas pengaruh waktu tunda, baik diskret maupun terdistribusi, pada model pertumbuhan logistik. Pembahasan diawali dengan model pertumbuhan logistik dan dilanjutkan dengan pengaruh masing-masing waktu tunda diskret dan terdistribusi pada model pertumbuhan tersebut. Pengaruh gabungan waktu tunda diskret dan terdistribusi akan dibahas pada bagian akhir dari artikel ini.

2. Model Pertumbuhan Logistik

Dinamika populasi secara matematika dapat dinyatakan dalam persamaan keseimbangan (Murray, 2002):

$$\text{Perubahan populasi} = \text{Kelahiran} - \text{Kematian} + \text{Imigrasi} - \text{Emigrasi} \quad (1)$$

Persamaan keseimbangan tersebut berkaitan dengan fakta bahwa perubahan jumlah individu dalam populasi merupakan keseimbangan antara proses yang menurunkan jumlah individu (kematian dan emigrasi) dan proses yang meningkatkan jumlah individu (kelahiran dan imigrasi). Misalkan jumlah individu dalam populasi pada waktu t adalah $N(t)$ dan pada beberapa saat kemudian, yaitu pada saat $t+\Delta t$, adalah $N(t+\Delta t)$. Dengan mengabaikan pengaruh migrasi, persamaan keseimbangan (1) dapat dinyatakan sebagai

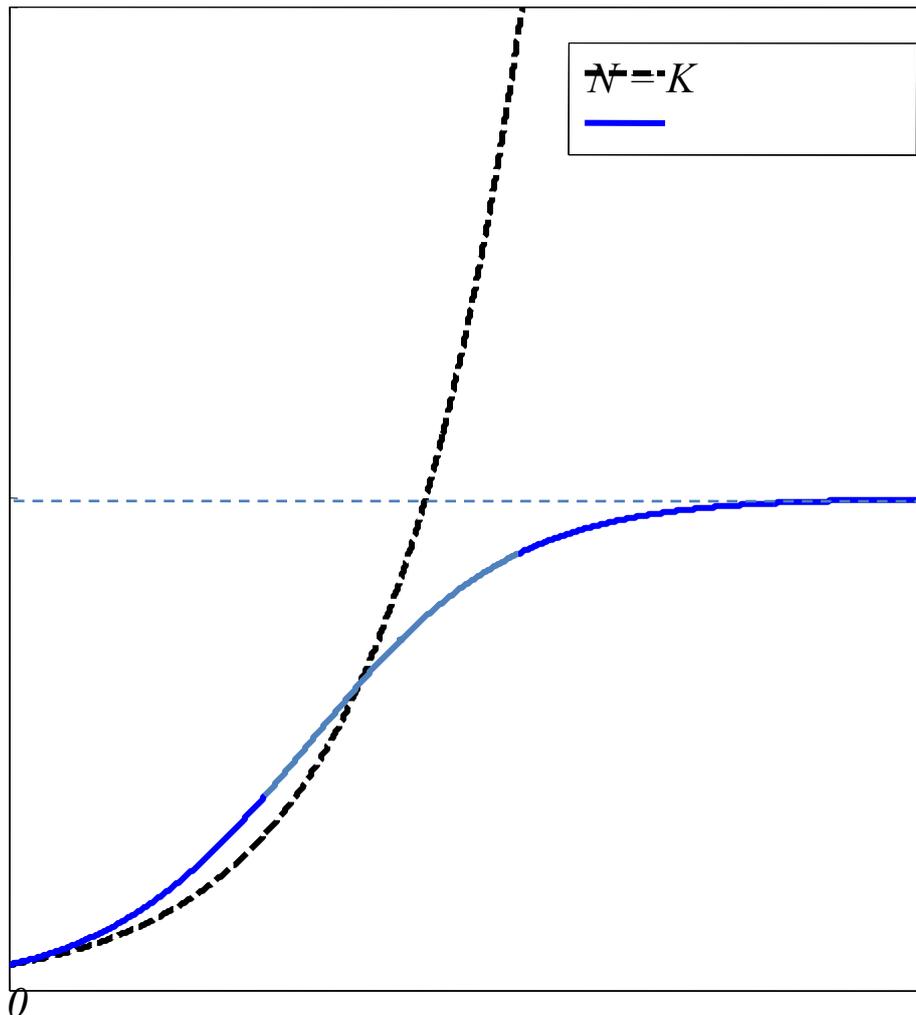
$$N(t+\Delta t) - N(t) = \text{Banyaknya kelahiran dalam waktu } \Delta t - \text{Banyaknya kematian dalam waktu } \Delta t.$$

Jika $\Delta t \rightarrow 0$ dan banyak kelahiran dan kematian proporsional dengan N , maka persamaan keseimbangan menghasilkan model pertumbuhan eksponensial yang dikenal sebagai model pertumbuhan Malthus, yaitu

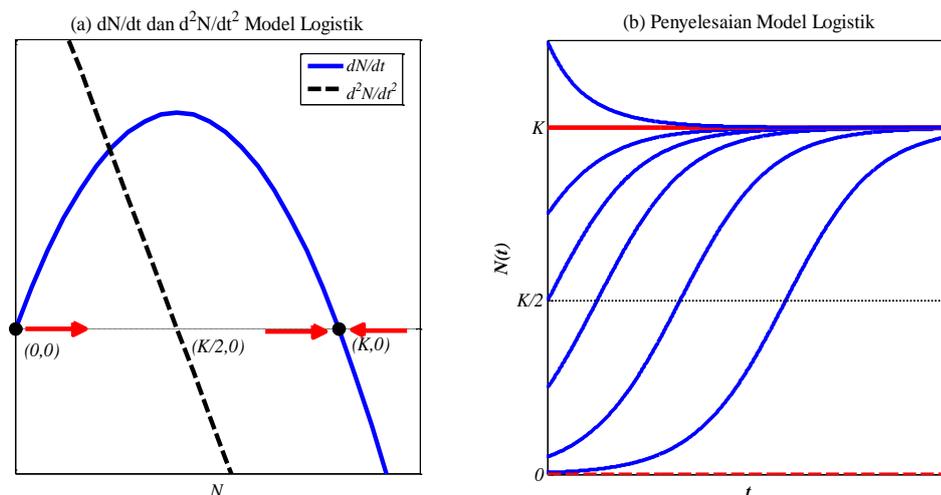
$$\frac{dN}{dt} = bN - \mu N = rN \quad \text{atau} \quad N(t) = N_0 \exp(rt), \quad r = b - \mu, \quad (2)$$

dimana b dan μ masing-masing adalah laju kelahiran dan laju kematian dengan populasi awal $N(0) = N_0$. Model pertumbuhan Malthus (2) sangat tidak realistis karena populasi berkembang secara eksponensial tanpa batas, padahal sumber daya lingkungan sangat terbatas. Untuk itu Verhulst memodelkan pertumbuhan populasi yang mempertimbangkan batasan daya dukung lingkungan (Murray, 2002; Smith, 2011)

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), N(0) = N_0 \quad (3)$$



Gambar 1. Perbandingan model pertumbuhan eksponensial (Malthus) dan model pertumbuhan logistik.



Gambar 2. (a) Grafik laju pertumbuhan populasi logistik dan turunannya. (b) Solusi model pertumbuhan populasi logistik untuk beberapa nilai awal yang berbeda. Perhatikan perbedaan perilaku kualitatif untuk nilai awal $N_0 < K/2$ dan $K/2 < N_0 < K$.

dimana $r > 0$ adalah laju pertumbuhan intrinsik dan $K > 0$ adalah konstanta daya dukung lingkungan. Pada model (3), jika N relatif kecil maka populasi berkembang secara eksponensial seperti pada model (2); tetapi jika N relatif besar maka individu-individu dalam populasi saling bersaing dalam mendapatkan sumber daya yang terbatas. Perbandingan solusi model (2) dan model (3) dapat dilihat pada Gambar 1. Meskipun persamaan (3) dapat diselesaikan secara langsung dengan metode pemisahan variabel, yaitu

$$N(t) = \frac{N_0 K \exp(rt)}{K + N_0 (\exp(rt) - 1)}, \quad (4)$$

dinamika populasi $N(t)$ dapat dilihat secara langsung dari model (3). Berdasarkan model (3), kurva dN/dt berbentuk parabola yang memotong sumbu N pada $N = 0$ atau $N = K$, lihat Gambar 2.(a). Terlihat bahwa $dN/dt > 0$ pada interval $(0, K)$ dan $dN/dt < 0$ pada interval lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap $N = 0$ tidak stabil, sedangkan $N = K$ merupakan titik tetap yang stabil global, sehingga untuk semua $N_0 > 0$ berlaku bahwa $N(t) \rightarrow K$ jika $t \rightarrow \infty$. Selain itu juga dapat dilihat bahwa jika

$N(t) < K/2$ maka $\frac{d^2N}{dt^2} > 0$ dan jika $N(t) > K/2$ maka $\frac{d^2N}{dt^2} < 0$. Akibatnya, $N(t)$

membentuk kurva sigmoid dengan titik belok pada t^* sedemikian hingga $N(t^*) = K/2$. Perilaku solusi tersebut dapat dilihat dengan jelas pada Gambar 2.(b) yang menunjukkan beberapa solusi dengan beberapa nilai awal yang berbeda.

3. Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda Diskret

Pada model logistik (3), pertumbuhan populasi pada saat t mempunyai laju yang proporsional dengan banyaknya populasi $N(t)$. Salah satu kelemahan pada model tersebut adalah bahwa laju pertumbuhan tersebut bergantung secara instan pada $N(t)$. Dalam banyak kasus, proses reproduksi tidak berjalan secara instan sehingga laju pertumbuhan seharusnya mempertimbangan waktu tunda, misalnya karena memerlukan

waktu pembentukan telur hingga menetas, waktu untuk menjadi dewasa, dan lain sebagainya. Dengan mempertimbangan waktu tunda, persamaan (3) dimodifikasi menjadi persamaan logistik dengan waktu tunda (Murray, 2002; Ruan, 2006)

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right), N(0) = N_0 \quad (5)$$

dimana $\tau > 0$ adalah parameter waktu tunda. Persamaan (5) juga dikenal sebagai persamaan Hutchinson. Waktu tunda pada persamaan Hutchinson (5) bersifat diskret yang berarti bahwa pengaruh kepadatan populasi hanya bergantung pada waktu tertentu di masa lalu, yaitu $t - \tau$. Titik tetap persamaan (5) diperoleh dengan meninjau model (5) pada saat model tersebut tidak mengalami perubahan yaitu ketika $dN/dt = 0$ atau $N(t) = N^* \equiv \text{konstan} \forall t$ dengan N^* titik tetap. Hal ini menghasilkan dua titik tetap yaitu $N_0^* = 0$ dan $N_1^* = K$. Perilaku solusi di sekitar titik tetap dapat dipelajari melalui linearisasi persamaan (5) di sekitar titik tetap tersebut. Untuk itu misalkan

$$N(t) = N^* + \varepsilon x(t) \text{ dengan } \varepsilon \ll 1. \quad (6)$$

Substitusi persamaan (6) ke dalam persamaan (5) menghasilkan sistem linear di sekitar titik tetap N^* . Persamaan hasil linearisasi di sekitar titik tetap $N_0^* = 0$ adalah $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$. Dengan demikian titik tetap $N_0^* = 0$ bersifat tidak stabil karena populasi tumbuh secara eksponensial. Selanjutnya, akan dipelajari perilaku solusi di titik tetap positif $N_1^* = K$. Linearisasi persamaan (6) di sekitar titik tetap $N_1^* = K$ menghasilkan persamaan linear

$$\frac{dx(t)}{dt} = -rx(t-\tau). \quad (7)$$

Seperti persamaan diferensial biasa pada umumnya, solusi persamaan (7) diasumsikan berbentuk $x(t) = c \exp(\lambda t)$ dengan c adalah suatu konstanta. Jelas bahwa titik tetap $N_1^* = K$ bersifat stabil apabila λ mempunyai bagian real yang negatif, yaitu jika $\text{Re}(\lambda) < 0$ dan tidak stabil jika $\text{Re}(\lambda) > 0$. Nilai eigen λ dapat dicari dengan mensubstitusikan solusi coba ke dalam persamaan (7) untuk mendapatkan persamaan karakteristik

$$\lambda = -r \exp(-\lambda \tau). \quad (8)$$

Jelas nilai λ bergantung secara kontinu pada τ , yaitu $\lambda \equiv \lambda(\tau)$. Lebih lanjut, jika $\tau = 0$ maka $\lambda = -r < 0$ sehingga titik tetap $N_1^* = K$ bersifat stabil. Hal ini sesuai dengan perilaku model (3). Apabila $\tau \neq 0$ maka nilai eigen λ dapat mengalami perubahan. Kestabilan titik tetap $N_1^* = K$ akan berubah apabila $\text{Re}(\lambda)$ mengalami perubahan tanda dari negatif menjadi positif. Dengan kondisi kontinuitas, λ berubah dari $-r$ ke suatu nilai sedemikian hingga $\text{Re}(\lambda) > 0$ apabila nilai τ bertambah besar. Oleh karena itu pasti terdapat $\tau = \tau_0$ sehingga $\text{Re}(\lambda(\tau_0)) = 0$. Misalkan $\lambda = \alpha + i\beta$. Dengan mensubstitusikan λ tersebut ke dalam persamaan karakteristik (8), dan kemudian masing-masing bagian real dan kompleks dipisahkan, maka diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} \alpha + r \exp(-\alpha \tau) \cos(\beta \tau) &= 0 \\ \beta - r \exp(-\alpha \tau) \sin(\beta \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Berdasarkan sistem persamaan (9), $\operatorname{Re}(\lambda(\tau_0)) = \alpha(\tau_0) = \alpha_0 = 0$ jika $\cos(\beta_0\tau) = 0, \beta_0 = \beta(\tau_0)$ yang berarti bahwa $\beta_0\tau_j = \frac{\pi}{2} + 2j\pi, j = 0, 1, 2, \dots$. Dari sistem persamaan (9), jelas bahwa pada kasus ini $\beta_0 = r$. Hal ini berarti bahwa $\tau_j = \frac{\pi}{2r} + \frac{2j\pi}{r}, j = 0, 1, 2, \dots$. Dengan demikian, jika $\tau = \tau_0 = \frac{\pi}{2r}$ maka persamaan karakteristik (8) mempunyai nilai eigen yang murni kompleks, yaitu $\lambda = \pm ir$; dan jika $\tau \in [0, \tau_0)$ maka semua nilai eigen mempunyai bagian real yang negatif. Selanjutnya, berdasarkan persamaan karakteristik (8), dapat ditunjukkan bahwa

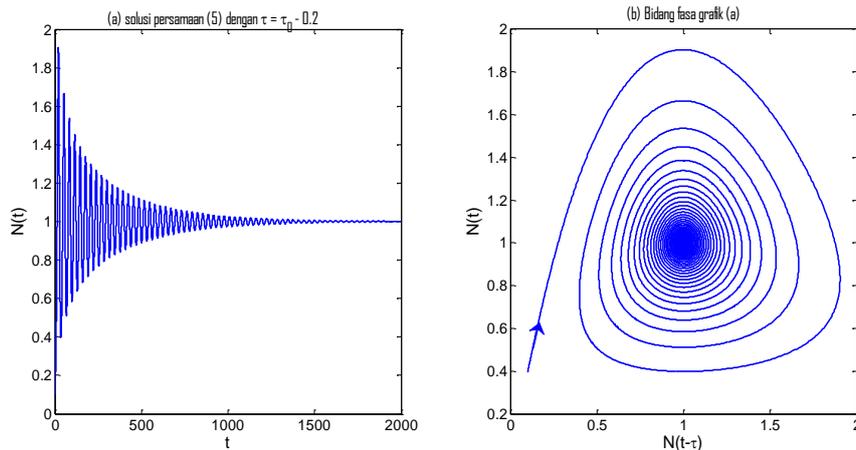
$$\left. \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_j} = \frac{r^2}{1+r^2\tau_j^2} > 0; j = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Pembahasan tersebut dapat disimpulkan dalam teorema berikut.

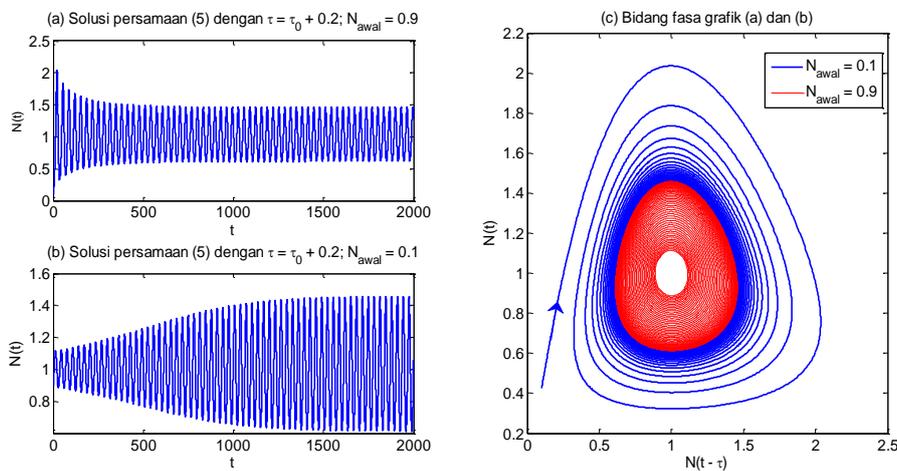
Teorema 1.

- (i) Jika $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2r}$ maka titik tetap $N_1^* = K$ bersifat stabil asimtotik.
- (ii) Jika $\tau = \tau_0 = \frac{\pi}{2r}$ maka titik tetap $N_1^* = K$ mengalami perubahan kestabilan, yaitu dari stabil asimtotik jika $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2r}$, menjadi tidak stabil dan muncul solusi periodik jika $\tau > \frac{\pi}{2r}$. Dengan kalimat lain titik tetap $N_1^* = K$ mengalami bifurkasi Hopf.

Sebagai ilustrasi, pada Gambar 3 ditunjukkan solusi persamaan Hutchinson (5) dengan $r = 0.2$ dan $K = 1$ dan nilai awal $N(t) = 0.1$ untuk semua $t \in [-\tau, 0]$. Dengan parameter tersebut diperoleh nilai waktu tunda kritis $\tau_0 = \pi/2r = 7.854$. Pada Gambar 5.(a) dan 5.(b) masing-masing ditunjukkan solusi sebagai fungsi waktu t dan bidang fasanya untuk kasus $\tau = \tau_0 - 0.2$. Terlihat dari kedua gambar tersebut bahwa solusi konvergen ke titik tetap $N = 1$, yang berarti titik tetap tersebut stabil asimtotik. Selanjutnya, jika digunakan $\tau = \tau_0 + 0.2$, baik dengan nilai awal $N(t) = 0.1$ maupun $N(t) = 0.9$ untuk semua $t \in [-\tau, 0]$, maka solusi tidak konvergen ke titik tetap manapun. Dalam hal ini persamaan Hutchinson mempunyai solusi periodik (*limit cycle*), lihat Gambar 4. Dari Gambar 4.(a) – 4.(c) terlihat bahwa solusi periodik tersebut bersifat stabil, yang mengindikasikan bahwa terjadi bifurkasi Hopf superkritikal.



Gambar 3. Solusi model pertumbuhan logistik (5) dengan waktu tunda diskret dengan $\tau < \tau_0$. (a) Grafik fungsi $N(t)$ sebagai fungsi waktu, dan (b) bidang fasa.



Gambar 4. Solusi model pertumbuhan logistik (5) dengan waktu tunda diskret dengan $\tau > \tau_0$. Grafik fungsi $N(t)$ sebagai fungsi waktu dengan nilai awal (a) $N_0 = 0.1$ dan (b) $N_0 = 0.9$. (c) Bidang fasa solusi dengan nilai awal $N_0 = 0.1$ dan $N_0 = 0.9$.

4. Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda Diskret

Waktu tunda pada persamaan Hutchinson (5) bersifat diskrit yang berarti bahwa pengaruh kepadatan populasi hanya bergantung pada waktu tertentu di masa lalu, yaitu $t - \tau$. Pengaruh kepadatan populasi mungkin saja bergantung pada suatu interval waktu tertentu. Pada kasus ini, pertumbuhan populasi dimodelkan oleh persamaan diferensial dengan waktu tunda terdistribusi atau dikenal sebagai persamaan integro-diferensial. Dengan mempertimbangkan waktu tunda terdistribusi, persamaan (5) dimodifikasi menjadi (Murray, 2002; Ruan, 2006)

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t G(t-s)N(s)ds \right) \quad (11)$$

dengan $G(t)$ disebut fungsi *kernel* tunda. Jika kernel tunda berupa fungsi delta Dirac

$G(t) = \delta(t - \tau)$, maka $\int_{-\infty}^t G(t-s)N(s)ds = \int_{-\infty}^t \delta(t - \tau - s)N(s)ds = N(t - \tau)$, sehingga persamaan

(11) akan menjadi persamaan Hutchinson (5). Berikut ini akan dibahas persamaan (11) dengan mempertimbangkan fungsi kernel tunda berbentuk (MacDonald, 1978):

$$G(u) = \phi \exp(-\phi u), \phi > 0. \quad (12)$$

Fungsi kernel tunda (12) secara kualitatif mengindikasikan bahwa respon pembobotan maksimum pada laju pertumbuhan adalah diakibatkan oleh kepadatan populasi pada saat t , sedangkan respon kepadatan populasi pada masa lalu menurun secara eksponensial. Dengan mensubstitusikan persamaan (12) ke dalam persamaan (11) dan memisalkan bahwa

$$M(t) = \int_{-\infty}^t \phi \exp(-\phi(t-s))N(s)ds, \quad (13)$$

serta dengan menerapkan aturan rantai, maka persamaan (11) dapat dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial biasa nonlinear orde pertama dengan dua variabel bebas (Ruan, 2006)

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= rN(t) \left(1 - \frac{M(t)}{K} \right) \\ \frac{dM(t)}{dt} &= \phi N(t) - \phi M(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Sistem persamaan (14) memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap trivial $(N_0^*, M_0^*) = (0, 0)$ dan titik tetap positif $(N^*, M^*) = (K, K)$. Dengan linearisasi sistem (14), dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa titik tetap trivial bersifat tidak stabil. Selanjutnya, linearisasi sistem (14) di sekitar titik tetap positif dilakukan dengan memisalkan $N(t) = N^* + \varepsilon x(t)$ dan $M(t) = M^* + \varepsilon y(t)$ dengan $\varepsilon \ll 1$. Dengan permisalan tersebut, sistem persamaan (14) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -ry(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \phi x(t) - \phi y(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Kestabilan titik tetap positif dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen dari persamaan karakteristik matriks Jacobi hasil linearisasi sistem. Persamaan karakteristik sistem (15) berbentuk

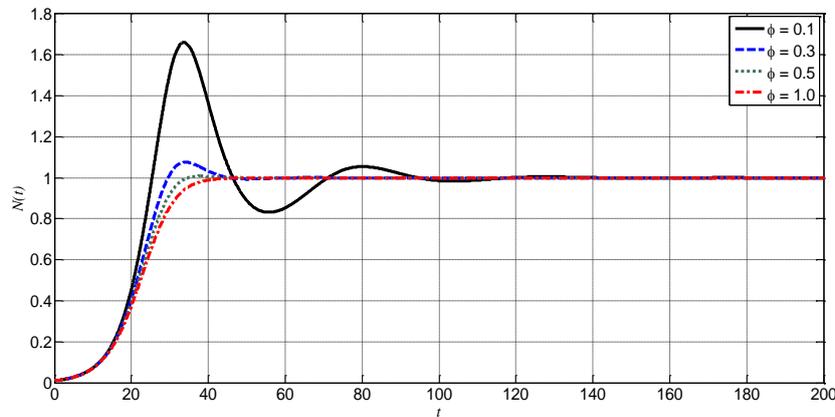
$$\lambda^2 + \phi\lambda + \phi r = 0, \quad (16)$$

dan mempunyai akar-akar karakteristik $\lambda_{1,2} = -\frac{\phi}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\phi^2 - 4\phi r}$. Jelas bahwa $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, sehingga titik tetap positif bersifat stabil asimtotik. Dengan demikian diperoleh kesimpulan seperti pada teorema berikut.

Teorema 2.

Perhatikan persamaan (11) dengan fungsi kernel tunda (12). Untuk sembarang τ , titik tetap trivial dari persamaan tersebut, yaitu $N_0^ = 0$, bersifat tidak stabil; sedangkan titik tetap positifnya, yaitu $N^* = K$, bersifat stabil asimtotik.*

Hasil analisis tersebut menunjukkan bahwa persamaan Hutchinson dengan waktu tunda terdistribusi dan fungsi kernel tunda (12) mempunyai sifat-sifat dinamik seperti pada model logistik tanpa waktu tunda. Sebagai ilustrasi dari sifat tersebut, pada Gambar 5 ditunjukkan solusi persamaan (11) dengan fungsi kernel tunda (12) dengan beberapa nilai ϕ yang berbeda.



Gambar 5. Solusi model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda terdistribusi (11) untuk beberapa nilai ϕ yang berbeda.

5. Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda Diskret dan Waktu Tunda Terdistribusi

Pada bagian sebelumnya telah dibahas model pertumbuhan logistik tanpa waktu tunda (respon kompetisi secara instan), dengan waktu tunda diskret dan waktu tunda terdistribusi. Model pertumbuhan populasi logistik dengan respon kompetisi instan dan waktu tunda diskret telah dibahas oleh Sun dkk. (2007), sedangkan model logistik dengan respon kompetisi instan dan waktu tunda terdistribusi telah dilakukan oleh Song dan Peng (2006). Pada bagian ini dibahas model pertumbuhan populasi yang melibatkan pengaruh dari kepadatan populasi yang bersifat instan dan dengan waktu tunda, baik waktu tunda diskrit maupun terdistribusi (Darti dkk., 2013):

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - a_1N(t) - a_2N(t-\tau) - a_3 \int_{-\infty}^t G(t-s)N(s)ds \right), \quad (17)$$

dengan koefisien-koefisien respon a_1, a_2 dan a_3 bernilai positif dan fungsi kernel tunda (12). Dengan permisalan (13) dan aturan rantai, persamaan (17) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= rN(t)(1 - a_1N(t) - a_2N(t-\tau) - a_3M(t)) \\ \frac{dM(t)}{dt} &= \phi N(t) - \phi M(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Seperti halnya sistem persamaan (14), sistem persamaan (18) juga memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap trivial $(N_0^*, M_0^*) = (0, 0)$ dan titik tetap positif $(N^*, M^*) = \left(\frac{1}{a_1 + a_2 + a_3}, \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3} \right)$. Dapat ditunjukkan bahwa titik tetap trivial tidak

stabil. Selanjutnya, akan dilakukan analisis kestabilan titik tetap positif $N^* = \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3}$. Dengan prosedur yang sama dengan sebelumnya, terlebih dahulu dilakukan linearisasi sistem (18) di sekitar titik tetap positif dengan memisalkan $N(t) = N^* + \varepsilon x(t)$ dan $M(t) = M^* + \varepsilon y(t)$ dengan $\varepsilon \ll 1$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -ra_1 N^* x(t) - ra_2 N^* x(t - \tau) - ra_3 N^* y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \phi x(t) - \phi y(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Persamaan karakteristik yang berkaitan dengan sistem (19) adalah

$$\lambda^2 + p\lambda + q + (u\lambda + v)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (20)$$

dengan $p = ra_1 N^* + \phi$, $q = r\phi N^* (a_1 + a_3)$, $u = ra_2 N^*$, $v = r\phi a_2 N^*$ dan $p > 0$, $q > 0$, $u > 0$, $v > 0$. Jika $\tau = 0$, yang menunjukkan tidak ada waktu pada proses pertumbuhan populasi, maka persamaan karakteristik (20) dapat dituliskan sebagai

$$\lambda^2 + (p+u)\lambda + q + v = 0 \quad (21)$$

dengan akar-akar $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(p+u) \pm \sqrt{p^2 + 2pu + u^2 - 4(q+v)}$. Bagian real kedua akar persamaan tersebut selalu bernilai negatif. Hal ini menunjukkan bahwa jika $\tau = 0$, maka titik tetap positif N^* stabil.

Berikut akan diselidiki kestabilan titik tetap positif dengan melihat distribusi akar-akar persamaan karakteristik (20) untuk kasus $\tau > 0$. Jika $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) merupakan akar persamaan (20), maka berlaku bahwa

$$q - \omega^2 + p\omega i + v\cos\omega\tau + u\omega\sin\omega\tau + (u\omega\cos\omega\tau - v\sin\omega\tau)i = 0.$$

Apabila bagian real dan bagian kompleks dalam persamaan tersebut dipisahkan, diperoleh

$$\begin{aligned} \omega^2 - q &= u\omega\sin\omega\tau + v\cos\omega\tau \\ p\omega &= v\sin\omega\tau - u\omega\cos\omega\tau \end{aligned} \quad (22)$$

sehingga diperoleh

$$\omega^4 - (u^2 + 2q - p^2)\omega^2 + q^2 - v^2 = 0. \quad (23)$$

Misalkan $D = (u^2 + 2q - p^2)^2 - 4(q^2 - v^2)$. Berkaitan dengan akar-akar persamaan (23), terdapat beberapa kemungkinan sebagai berikut:

(a). Persamaan (23) tidak mempunyai akar positif, jika salah satu kondisi berikut terpenuhi:

- (S₁) $D < 0$,
- (S₂) $D > 0$, $q^2 - v^2 \geq 0$, $u^2 + 2q - p^2 < 0$,
- (S₃) $D = 0$, $u^2 + 2q - p^2 \leq 0$,

Dalam hal ini

$$q^2 - v^2 = r^2 \phi^2 N^{*2} (a_2 + a_1)(a_2 - a_1) \text{ dan } u^2 + 2q - p^2 = -\phi^2 + 2r\phi a_2 N^* + (ra_1 N^*)^2.$$

(b). Persamaan (23) mempunyai dua akar positif, yaitu

$$\omega_{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(u^2 + 2q - p^2 \pm \sqrt{D} \right)^{1/2}, \text{ jika } D > 0, q^2 - v^2 > 0, u^2 + 2q - p^2 > 0 \text{ atau } D = 0, u^2 + 2q - p^2 > 0 \text{ terpenuhi.}$$

(c). Persamaan (23) hanya mempunyai satu akar positif ω_+ , jika $q^2 - v^2 < 0$ atau $q^2 - v^2 = 0, u^2 + 2q - p^2 > 0$ terpenuhi.

Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan persamaan (23) mempunyai dua akar positif $\pm \omega_{\pm}$, sehingga berdasarkan persamaan (20), diperoleh

$$\tau_k^{\pm} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \cos^{-1} \left(\frac{(v - pu)\omega_{\pm}^2 - qv}{u^2\omega_{\pm}^2 + v^2} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_{\pm}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Dengan kalimat lain, pada saat $\tau = \tau_k^{\pm}$, persamaan (20) mempunyai sepasang akar kompleks murni $\lambda = \pm i\omega_{\pm}$. Notasikan $\lambda(\tau) = \phi(\tau) + i\omega(\tau)$ sebagai akar persamaan (20) sedemikian sehingga $\phi(\tau_k^{\pm}) = 0, \omega(\tau_k^{\pm}) = \omega_{\pm}$. Jika $\lambda(\tau)$ disubstitusikan ke persamaan karakteristik (20) dan diturunkan terhadap τ , maka

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{(2\lambda + p)e^{\lambda\tau} + u}{u\lambda^2 + v\lambda} - \frac{\tau}{\lambda} = \frac{(2\lambda + p)e^{\lambda\tau}}{\lambda(u\lambda + v)} + \frac{u}{\lambda(u\lambda + v)} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

Dengan menggunakan persamaan (22) dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1}_{\tau_k^{\pm}} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{(2\lambda + p)e^{\lambda\tau}}{\lambda(u\lambda + v)} \right\}_{\tau_k^{\pm}} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{u}{\lambda(u\lambda + v)} \right\}_{\tau_k^{\pm}} \\ &= \frac{\omega_{\pm}^2}{\kappa} (\pm \sqrt{D}) \end{aligned}$$

dengan, $\kappa = u^2\omega_{\pm}^4 + v^2\omega_{\pm}^2 > 0$. Dengan demikian, jika $D \neq 0$ maka

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1}_{\tau=\tau_k^+} \right\} &= \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1}_{\tau=\tau_k^+} \right\} = \operatorname{sign} \left\{ \frac{\omega_+^2 \sqrt{D}}{\kappa} \right\} > 0 \\ \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1}_{\tau=\tau_k^-} \right\} &= \operatorname{sign} \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1}_{\tau=\tau_k^-} \right\} = \operatorname{sign} \left\{ -\frac{\omega_-^2 \sqrt{D}}{\kappa} \right\} < 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian sebelumnya, dapat dirumuskan beberapa hal berkaitan dengan akar-akar persamaan karakteristik (20) seperti pada lemma berikut.

Lemma 3

Misalkan $\tau_k^{\pm} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \cos^{-1} \left(\frac{(v - pu)\omega_{\pm}^2 - qv}{u^2\omega_{\pm}^2 + v^2} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_{\pm}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$

1. Jika paling sedikit satu dari kondisi (S1)-(S3) dipenuhi, maka semua akar persamaan (20) mempunyai bagian real negatif untuk semua $\tau \geq 0$.

2. Jika $D > 0$, $(a_1 + a_3)^2 > a_2^2$ dan $0 < \phi < \frac{r(a_3 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2})}{a_1 + a_2 + a_3}$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga ketika $\tau \in (\tau_{k-1}^-, \tau_k^+)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ semua akar persamaan (20) mempunyai bagian real negatif, dengan $\tau_{-1}^- = 0$; ketika $\tau \in (\tau_k^+, \tau_k^-)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dan $\tau > \tau_n^+ = \tau^*$ persamaan (20) mempunyai paling sedikit satu akar yang bagian realnya positif.
3. Jika salah satu dari $(a_1 + a_3)^2 < a_2^2$ atau $a_2 = a_1 + a_3$ dan $0 < \alpha < r \left(\frac{a_3 + \sqrt{2a_3(a_1 + a_3)}}{2(a_1 + a_3)} \right)$ terpenuhi, maka semua akar persamaan (20) mempunyai bagian real negatif untuk $\tau \in [0, \tau_0^+]$ dan persamaan (20) memiliki paling sedikit satu akar dengan bagian real positif untuk $\tau > \tau_0^+ = \tau^*$.

Implikasi Lemma 3 terhadap kestabilan titik tetap positif dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4

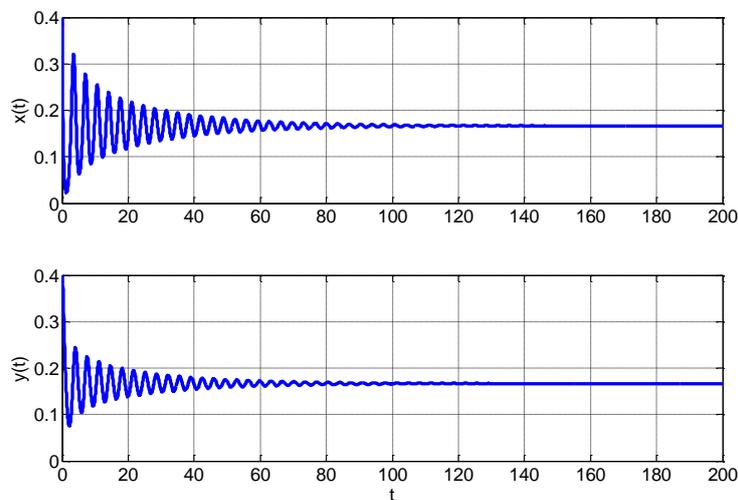
Misalkan $\tau_k^\pm = \frac{1}{\omega_\pm} \cos^{-1} \left(\frac{(v - pu)\omega_\pm^2 - qv}{u^2\omega_\pm^2 + v^2} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_\pm}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

1. Apabila paling sedikit satu kondisi (S1)-(S2) terpenuhi, maka titik tetap positif N^* dari sistem (17) adalah stabil asimtotik.
2. Jika $D > 0$, $(a_1 + a_3)^2 > a_2^2$ dan $0 < \phi < \frac{r(a_3 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2})}{a_1 + a_2 + a_3}$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga kestabilan titik tetap N^* berubah dari stabil menjadi tidak stabil, yaitu titik tetap N^* stabil asimtotik untuk $\tau \in \bigcup_{k=0}^n (\tau_{k-1}^-, \tau_k^+)$ dengan $\tau_{-1}^- = 0$ dan tidak stabil untuk $\tau \in \bigcup_{k=0}^{n-1} (\tau_k^+, \tau_k^-)$ dan $\tau > \tau_n^+ = \tau^*$.
3. Jika salah satu dari $(a_1 + a_3)^2 < a_2^2$ atau $a_2 = a_1 + a_3$ dan $0 < \phi < r \left(\frac{a_3 + \sqrt{2a_3(a_1 + a_3)}}{2(a_1 + a_3)} \right)$ terpenuhi, maka titik tetap N^* stabil asimtotik untuk $\tau \in [0, \tau_0^+)$ dan tidak stabil untuk $\tau > \tau_0^+ = \tau^*$.
4. Jika $D > 0$, $(a_1 + a_3)^2 > a_2^2$ dan $0 < \phi < \frac{r(a_3 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2})}{a_1 + a_2 + a_3}$, maka sistem persamaan (18) menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf pada saat $\tau_k^\pm = \tau^*$.

Akan tetapi, jika salah satu dari $(a_1 + a_3)^2 < a_2^2$ atau $a_2 = a_1 + a_3$ dan $0 < \phi < r \left(\frac{a_3 + \sqrt{2a_3(a_1 + a_3)}}{2(a_1 + a_3)} \right)$ terpenuhi, maka sistem (18) atau (17) menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf pada $\tau_k^+ = \tau^*$.

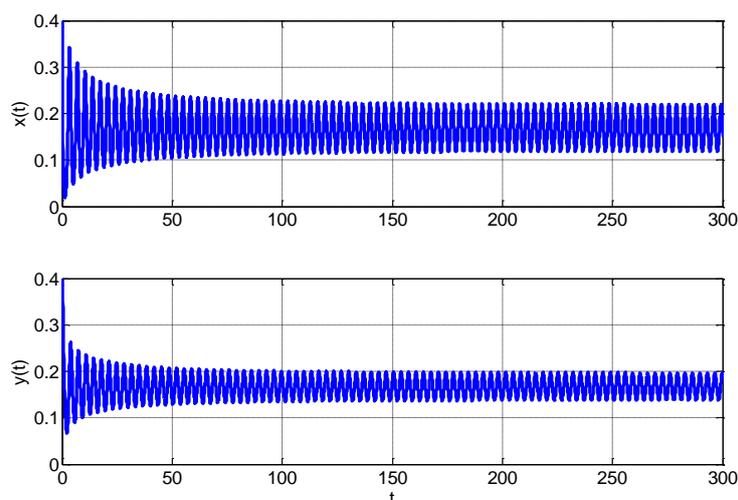
Untuk memberikan ilustrasi hasil analisis berikut ditunjukkan solusi sistem (18) dengan menggunakan nilai-nilai parameter $r = 2, \phi = 1, a_1 = 1, a_2 = 4$ dan $a_3 = 1$. Berdasarkan parameter-parameter tersebut sistem (18) mempunyai titik tetap positif $(N^*, M^*) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, sedangkan nilai $\omega^* = 1.732$ dan $\tau^* = 1.209$. Perilaku solusi dengan dua nilai waktu tunda (τ) yang berbeda dapat dilihat pada Gambar 6 dan Gambar 7. Dari gambar tersebut terlihat bahwa jika $\tau = 1.2 < 1.209 = \tau^*$ maka solusi menuju titik tetap positif $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Hal ini menunjukkan bahwa titik tetap tersebut bersifat stabil asimtotik.

Sebaliknya, jika waktu tunda ditingkatkan menjadi $\tau = 1.3 > 1.209 = \tau^*$ maka solusi tidak menuju ke titik kesetimbangan, tetapi terjadi orbit periodik di sekitar titik tetap. Hasil simulasi ini menunjukkan bahwa terjadi bifurkasi pada titik tetap akibat adanya perubahan nilai parameter waktu tunda τ . Dengan kalimat lain, titik tetap positif mengalami bifurkasi Hopf pada saat $\tau = \tau^*$.



Gambar 6. Solusi persamaan (17) dengan $r = 2; \phi = 1; a_1 = 1; a_2 = 4;$

$$a_3 = 1; \omega^* = 1.732; \tau = 1.2 \text{ dan } \tau^* = 1.209$$



Gambar 7. Solusi persamaan (17) dengan $r = 2; \phi = 1; a_1 = 1; a_2 = 4; a_3 = 1; \omega^* = 1.732; \tau^* = 1.209$ dan $\tau = 1.3$

6. Kesimpulan

Model pertumbuhan populasi logistik dengan waktu tunda telah dianalisis untuk melihat pengaruh waktu tunda pada sifat-sifat dinamikanya, khususnya pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik tetap. Telah ditunjukkan bahwa waktu tunda diskret dapat mengakibatkan perubahan kestabilan titik tetap positif dan munculnya solusi periodik. Dengan kalimat lain, waktu tunda diskret dapat menyebabkan terjadinya bifurkasi Hopf. Waktu tunda terdistribusi pada model logistik dapat menyebabkan pertumbuhan yang berhasil tetapi tidak mempengaruhi kestabilan titik tetap positif. Gabungan waktu tunda diskret dan terdistribusi pada model logistik juga mengakibatkan terjadinya bifurkasi Hopf dengan dinamika yang lebih kompleks.

Daftar Pustaka

- Darti, I., K. Andawaningtyas dan V.H. Krisnawati, *Analisis dinamik persamaan Hutchinson kontinu dengan waktu tunda diskret dan terdistribusi*, Laporan Penelitian DPP/SPP FMIPA Universitas Brawijaya, 2013.
- Kuang, Y., *Delay differential equations with applications in population dynamics*, Academic Press, Boston, 1993.
- MacDonald, N., *Time lags in biological models*, Lecture Notes in Biomathematics **27**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1978.
- Murray, J.D., *Mathematical biology: I. An introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002.



- Ruan, S., Delay differential equations in single species dynamics, dalam *Delay differential equations and applications*, Ed(s): O. Arino, M.L. Hbid dan A. Ait Dads, Springer, Berlin, hal. 477-517, 2006.
- Sarkar, S. dan A. Plutynski, *A Companion to the Philosophy of Biology*, Blackwell Publishing Ltd, Maiden, 2008.
- Smith, H., *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Springer, New York, USA, 2011.
- Song, Y. dan Y. Peng, Stability and bifurcation analysis on a Logistic model with discrete and distributed delays, *Applied Mathematics and Computations*, **181**, hal. 1745-1757, 2006.
- Sun, C.J., M.A. Han dan Y.P. Yang, Analysis of stability and Hopf bifurcation for a delayed logistic equation, *Chaos, Soliton and Fractals*, **31**, hal. 672-682, 2007.

